



Universidade de Vigo



Universidad
Carlos III de Madrid



POLITÉCNICA

Máster en Matemática Industrial

2013 – 2015

Trabajo Fin de Máster

Caracterización acústica de una placa absorbente a partir de la incidencia de una onda plana

Laura del Río Martín

Fecha presentación: 21 de Julio de 2015

Tutor: Andrés Prieto Aneiros

Empresa: Grupo de Investigación en Metrología Óptica de la Universidad de Vigo

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. Introducción | 1 |
| 2. Modelos matemáticos | 5 |
| 2.1. Modelos matemáticos | 5 |
| 2.1.1. Fluido compresible | 5 |
| 2.1.2. Sólido visco-elástico | 8 |
| 2.1.3. Placa rígida | 9 |
| 2.2. Ondas planas | 9 |
| 2.2.1. Ondas planas para el fluido compresible | 9 |
| 2.2.2. Ondas planas para el sólido visco-elástico | 10 |
| 2.3. Problema multicapa | 12 |
| 2.3.1. Incidencia normal | 13 |
| 2.3.2. Incidencia oblicua | 15 |
| 2.4. Condiciones de acople | 16 |
| 2.4.1. Configuración sin placa | 17 |
| 2.4.2. Configuración con placa rígida | 23 |
| 2.5. Niveles y coeficientes acústicos | 27 |
| 2.5.1. Validación | 29 |
| 3. Problema inverso | 35 |
| 3.1. Datos experimentales | 35 |
| 3.2. Ajustes del módulo de Young en la configuración sin placa | 38 |
| 3.2.1. Ajuste considerando E' y E'' constantes | 38 |
| 3.2.2. Ajuste considerando el módulo de Young como función lineal de la frecuencia | 44 |
| 3.2.3. Ajuste considerando el módulo de Young gobernado por una función arbitraria que depende de la frecuencia | 49 |
| 3.2.4. Ajuste con información de gradiente y hessiano | 55 |
| 3.3. Ajuste de los coeficientes de viscosidad y elasticidad de la placa rígida | 65 |
| 3.3.1. Ajuste considerando módulo de Young constante | 65 |
| 3.3.2. Ajuste con información de gradiente y hessiano | 66 |
| 3.4. Ajuste del módulo de Young en la configuración con placa | 70 |
| 3.4.1. Ajuste considerando E' y E'' constantes | 70 |
| 3.4.2. Ajuste considerando el módulo de Young gobernado por una función arbitraria que depende de la frecuencia | 80 |

| | |
|--|-----------|
| 3.5. Comportamiento del módulo de Young frente a la presión hidrostática | 90 |
| 4. Discretización mediante elementos finitos | 93 |
| 4.1. Formulación variacional | 94 |
| 4.2. Discretización por elementos finitos | 95 |
| 5. Resultados numéricos | 99 |
| 5.1. Configuraciones geométricas | 99 |
| 5.2. Simulaciones numéricas mono-frecuenciales | 100 |
| 5.2.1. Resultados numéricos con la configuración MP | 104 |
| 5.2.2. Resultados numéricos con la configuración MA | 104 |
| 5.2.3. Resultados numéricos con la configuración MB | 106 |
| 5.3. Simulaciones numéricas multi-frecuenciales | 108 |

Capítulo 1

Introducción

En la actualidad, cada vez es mayor la preocupación por el aislamiento y el acondicionamiento acústico [24]. Además, las exigencias de las normativas son cada vez mayores¹. La aparición de nuevos materiales que nos permiten un mejor acondicionamiento o aislamiento acústico (véase, por ejemplo [21]) nos lleva a la necesidad de estudiar y conocer las propiedades que caracterizan acústicamente un material absorbente ya que éstas nos permiten su correcta utilización. En este Trabajo Fin de Máster, propuesto por el Grupo de investigación en Metrología Óptica de la Universidad de Vigo, se han caracterizado las propiedades acústicas de una plancha de material absorbente a partir de medidas experimentales en las que intervienen como excitación mecánica las ondas planas. Más precisamente, se ha caracterizado acústicamente una plancha del material AptFlex SF5048 proporcionada por la empresa *Precision Acoustics* (véase [3]) a partir de las gráficas de respuesta en frecuencia para el nivel de reducción de eco, la pérdida por inserción y el coeficiente de disipación de potencia, proporcionadas por el distribuidor de dicho material absorbente en la documentación técnica [3].

El Grupo de investigación en Metrología Óptica ha realizado una serie de experimentos con dichas planchas absorbentes en los que han utilizado distintas configuraciones geométricas (véase uno de esos experimentos en la Figura 1.1). Estos experimentos se han reproducido numéricamente para comparar los resultados experimentales con los obtenidos mediante simulación numérica.

En consecuencia, el objetivo principal de este Trabajo Fin de Máster ha sido determinar los parámetros intrínsecos que permiten caracterizar el comportamiento acústico de una plancha de material absorbente a partir del estudio de la señal reflejada y transmitida en un problema de propagación de ondas planas a través de dicha plancha. Los objetivos específicos que se abordan en este Trabajo Fin de Máster son: (a) realizar la modelización matemática de cada uno de los medios involucrados en el problema acústico (un fluido, un sólido visco-elástico y una placa rígida), (b) estudiar un problema inverso, en el que a partir de diversos problemas de propagación acústica en medios multicapa se identifican los valores de los parámetros que caracterizan el comportamiento acústico de una plancha de material absorbente, y (c) realizar una batería de simulaciones numéricas mediante elementos finitos con las que reproducir las medidas

¹Real Decreto 1367/2007, de 19 de octubre, por el que se desarrolla la Ley 37/2003, de 17 de noviembre, del Ruido, en lo referente a zonificación acústica, objetivos de calidad y emisiones acústicas



Figura 1.1: Esquema de uno de los experimentos realizados por el Grupo de investigación en Metrología Óptica en un tanque de agua (las planchas de material absorbente aparecen sumergidas en el interior).

experimentales realizadas en test de laboratorio en un tanque.

Teniendo en cuenta estos tres objetivos, este Trabajo Fin de Máster se ha dividido en tres partes:

- En el primer bloque (Capítulo 2) se han planteado dos problemas de propagación acústica de ondas planas en medios multicapa. En el primero de dichos problemas, se ha estudiado la propagación de ondas planas armónicas en un medio multicapa compuesto por un fluido compresible, un sólido visco-elástico y un fluido compresible tanto en incidencia normal como en incidencia oblicua. En el segundo problema, se ha estudiado la propagación de ondas planas en un medio multicapa similar al anterior, que está formado por un fluido compresible, un sólido visco-elástico, una placa rígida y un fluido compresible tanto en incidencia normal como en incidencia oblicua. Para resolver ambos problemas, se han descrito los modelos matemáticos utilizados para cada uno de los medios (fluido compresible, sólido visco-elástico y placa rígida). Una vez se ha realizado la modelización matemática de los medios, se han planteado las condiciones de acople entre ellos y se han descrito en detalle los sistemas lineales que se deben resolver para hallar la solución analítica del problema de propagación. Además, a partir de estas soluciones analíticas, se ha procedido al cálculo de una serie de niveles y coeficientes acústicos que son de interés en este trabajo, como son los coeficientes de reflexión y transmisión, el nivel de reducción de eco, la pérdida por inserción y el coeficiente de disipación de potencia. Todos estos cálculos han sido implementados en el ordenador, usando el entorno de programación MATLAB y se han realizado una serie de test de validación de todos los programas implementados.

- La segunda parte (Capítulo 3) se ha centrado en la resolución numérica de un problema inverso a partir del que caracterizar las propiedades acústicas del material absorbente. Debido a que solo se conocen los datos proporcionados en la hoja técnica de especificaciones del material absorbente (véase [3]) y dichos datos no pueden ser utilizados directamente para calcular las propiedades acústicas del material, se ha diseñado un problema inverso con el que, a partir de la señal reflejada y transmitida de una onda plana incidente sobre la plancha de material absorbente, se han tratado de obtener los valores que caracterizan acústicamente el material mediante un modelo visco-elástico, esto es, el módulo de Young y el coeficiente de Poisson. Para resolver dicho problema inverso, se han utilizado los resultados de los niveles y coeficientes acústicos experimentales proporcionados por el fabricante del material absorbente objeto de estudio. En la memoria, se incluye la descripción en detalle de los distintos ajustes, bajo diferentes hipótesis de trabajo, que permiten obtener los valores del módulo de Young, de tal manera que se obtienen numéricamente niveles y coeficientes acústicos que aproximan de forma precisa aquellos medidos experimentalmente.
- En la última parte (Capítulos 4 y 5) se ha utilizado un método de elementos finitos para calcular una solución aproximada del problema de interacción fluido-estructura en el que están involucradas varias planchas de material absorbente. Para ello, se ha planteado el problema fuerte y la formulación variacional que nos permiten realizar una discretización mediante elementos finitos. Además, se ha realizado una batería de simulaciones numéricas utilizando las propiedades acústicas obtenidas en la resolución del problema inverso de la segunda parte de este Trabajo. Estas simulaciones numéricas se han realizado con condiciones de contorno y con unas configuraciones geométricas similares a las utilizadas en los experimentos llevados a cabo por el Grupo de investigación en Metrología Óptica. De esta forma, se han podido comparar los resultados de las simulaciones numéricas con los resultados experimentales obtenidos.

Durante la realización de este Trabajo Fin de Máster se ha utilizado el lenguaje de programación MATLAB para la implementación de los programas que resuelven los sistemas de ecuaciones lineales asociados a la propagación acústica de ondas planas en medios multicapa (tanto en el caso de incidencia normal como en incidencia oblicua). Para la realización de las simulaciones numéricas mediante elementos finitos en todas las configuraciones geométricas de laboratorio, se ha utilizado el paquete de ordenador COMSOL Multiphysics [1].

Capítulo 2

Modelos matemáticos

En este capítulo se han estudiado dos problemas de propagación de ondas en medios multicapa: el primero, en el que el medio multicapa está compuesto por un fluido compresible, un sólido visco-elástico y un fluido compresible, al que a partir de este punto denominaremos configuración sin placa y el segundo, compuesto por un fluido compresible, un sólido visco-elástico, una placa rígida y un fluido compresible, al que a partir de ahora denominaremos configuración con placa. Ambos problemas se han estudiado tanto en incidencia normal como en incidencia oblicua.

2.1. Modelos matemáticos

A continuación, se han descrito los modelos matemáticos que se han utilizado para caracterizar el comportamiento acústico de cada uno de los medios que aparecen en ambos problemas de propagación acústica multicapa.

2.1.1. Fluido compresible

Bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones, la ecuación lineal del movimiento en términos del desplazamiento es (véase [17])

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \text{Div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0}, \quad (2.1)$$

donde ρ_0 es la densidad de masa en el estado de referencia inicial, \mathbf{u} es el campo de desplazamientos y $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de esfuerzos.

Si consideramos la ley constitutiva

$$\boldsymbol{\sigma} = -\pi \mathbf{I}, \quad (2.2)$$

donde $\pi = -\rho_0 c_0^2 \text{Div} \mathbf{u}$ es la fluctuación lagrangiana de la presión con respecto a la presión del estado inicial π_0 .

Teniendo en cuenta (2.1) y (2.2), se obtiene que, para un fluido compresible no viscoso e isentrópico, se satisface

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \text{Div}(\rho_0 c_0^2 \text{Div} \mathbf{u} \mathbf{I}) = \mathbf{0}, \quad (2.3)$$

donde c_0 es la velocidad del sonido del fluido en el estado de referencia inicial. A continuación se muestra cómo se han calculado los valores ρ_0 y c_0 en función de la presión hidrostática y de la temperatura.

Para calcular la densidad de masa en función de la presión hidrostática y de la temperatura se ha utilizado el estándar IAPWS95, *International Association for the Properties of Water and Steam, Formulation 1995*, (véase [15] y [2] para obtener más detalles).

Además, se ha supuesto que la velocidad del sonido viene dada por una función respuesta que depende de la presión hidrostática y de la temperatura siguiendo el trabajo [4]. En [2] se muestra que las expresiones utilizadas para calcular la densidad de masa en función de la presión hidrostática y de la temperatura consideran la temperatura según la ITS-90 (*International Temperature Scale of 1990*). Atendiendo a esta observación y siguiendo el algoritmo propuesto por Del Grosso [11], la velocidad del sonido en función de la presión hidrostática y la temperatura viene dada por

$$\hat{c}(\theta, \pi_0) = c(\theta, 0) + M_1(\theta)(\pi_0 - 0.101325) + M_2(\theta)(\pi_0 - 0.101325)^2 + M_3(\theta)(\pi_0 - 0.101325)^3, \quad (2.4)$$

donde \hat{c} , θ y π_0 son, respectivamente, la función respuesta de la velocidad del sonido, la temperatura (en grados Celsius) y la presión hidrostática (en MPa). Las funciones involucradas en (2.4) vienen dadas por

$$\begin{aligned} c(\theta, 0) &= a_{00} + a_{10}\theta + a_{20}\theta^2 + a_{30}\theta^3 + a_{40}\theta^4 + a_{50}\theta^5, \\ M_1(\theta) &= a_{01} + a_{11}\theta + a_{21}\theta^2 + a_{31}\theta^3, \\ M_2(\theta) &= a_{02} + a_{12}\theta + a_{22}\theta^2 + a_{32}\theta^3, \\ M_3(\theta) &= a_{03} + a_{13}\theta + a_{23}\theta^2 + a_{33}\theta^3. \end{aligned} \quad (2.5)$$

En la Tabla 2.1 se muestran los coeficientes a_{mn} para $0 \leq m \leq 3$, $0 \leq n \leq 3$ utilizados en la definición de $M_j(\theta)$, $j = 1, 2, 3$, de (2.5), los cuales han sido obtenidos del trabajo [6].

| $m \backslash n$ | 1 | 2 | 3 |
|------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 0 | 1.49043589 | $4.31532833 \times 10^{-3}$ | $-1.852993525 \times 10^{-5}$ |
| 1 | $1.077850609 \times 10^{-2}$ | $-2.938590293 \times 10^{-4}$ | $1.481844713 \times 10^{-6}$ |
| 2 | $-2.232794656 \times 10^{-4}$ | $6.822485943 \times 10^{-6}$ | $-3.940994021 \times 10^{-8}$ |
| 3 | $2.718246452 \times 10^{-6}$ | $-6.674551162 \times 10^{-8}$ | $3.939902307 \times 10^{-10}$ |

Tabla 2.1: Coeficientes del ajuste del algoritmo de Del Grosso [11] para las funciones descritas en (2.5).

Además, los coeficientes necesarios para definir $c(\theta, 0)$ son los siguientes:

$$\begin{cases} a_{00} = 1402.38744, \\ a_{10} = 5.03836171, \\ a_{20} = -5.81172916 \times 10^{-2}, \\ a_{30} = 3.34638117 \times 10^{-4}, \\ a_{40} = -1.48259672 \times 10^{-6}, \\ a_{50} = 3.16585020 \times 10^{-9}. \end{cases}$$

Si se tiene en cuenta la expresión de la velocidad del sonido (2.4), entonces

$$c_0 = \hat{c}(\theta, \pi_0)$$

donde $\theta = 20^\circ \text{ C}$ y $\pi_0 = 0.101325 \text{ MPa}$.

Teniendo en cuenta la expresión (2.3), la ecuación del movimiento linealizada en términos del desplazamiento, para un fluido compresible no viscoso e isentrópico es

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{u}} - \nabla(\rho_0 c_0^2 \text{Div } \mathbf{u}) = \mathbf{0},$$

donde $\ddot{\mathbf{u}}$ denota la derivada segunda en tiempo del campo de desplazamientos \mathbf{u} . Imponiendo soluciones armónicas de la forma

$$\mathbf{u}(\mathbf{p}, t) = \text{Re}(e^{-i\omega t} \mathbf{U}(\mathbf{p})), \quad (2.6)$$

donde ω representa la frecuencia angular, se obtiene que la ecuación del movimiento en desplazamientos es

$$-\omega^2 \rho_0 \mathbf{U} - \nabla(\rho_0 c_0^2 \text{Div } \mathbf{U}) = \mathbf{0}, \quad (2.7)$$

donde ahora el campo de desplazamientos armónico toma valores complejos. Si se escribe la ecuación del movimiento en términos de la presión resulta

$$\frac{1}{\rho_0 c_0^2} \ddot{\pi} - \text{Div} \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla \pi \right) = 0.$$

Imponiendo soluciones armónicas de la forma

$$\pi(\mathbf{p}, t) = \text{Re}(e^{-i\omega t} \Pi(\mathbf{p})),$$

la ecuación resultante es

$$-\frac{\omega^2}{\rho_0 c_0^2} \Pi - \text{Div} \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla \Pi \right) = 0.$$

Si ρ_0 es constante, teniendo en cuenta que $\text{Div} \nabla \Pi = \Delta \Pi$, obtenemos

$$-\frac{\omega^2}{c_0^2} \Pi - \Delta \Pi = 0. \quad (2.8)$$

Si se denota por $k = \frac{\omega}{c_0}$ entonces la ecuación (2.8) se puede escribir como

$$-k^2 \Pi - \Delta \Pi = 0,$$

que es la conocida como Ecuación de Helmholtz.

2.1.2. Sólido visco-elástico

La ecuación del movimiento en un sólido visco-elástico viene dada por (2.1). Además, la ley constitutiva en el sólido visco-elástico es (véase [13])

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t C_{ijkl}(t-\tau) \dot{\mathcal{E}}_{kl}(\tau) d\tau, \quad (2.9)$$

donde σ es el tensor de esfuerzo, $\mathcal{E} = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t}{2}$ es el tensor de deformaciones, \mathbf{C} es el tensor de elasticidad y $\dot{\mathcal{E}}$ denota la derivada con respecto al tiempo de \mathcal{E} . De forma análoga a como ocurre en la ley de Hooke, supondremos que la acción del tensor \mathbf{C} sobre cualquier tensor R viene dada por

$$C_{ijkl} R_{kl} = \hat{\lambda} R_{kk} \delta_{ij} + 2\hat{\mu} R_{ij}, \quad (2.10)$$

donde $\hat{\lambda}$ y $\hat{\mu}$ son los coeficientes de Lamé asociados al material elástico.

Teniendo en cuenta (2.10) en (2.9), resulta

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(t) &= \int_{-\infty}^t \hat{\lambda}(t-\tau) \dot{\mathcal{E}}_{kk} \delta_{ij} + 2\hat{\mu}(t-\tau) \dot{\mathcal{E}}_{ij}(\tau) d\tau \\ &= (\hat{\lambda} * \dot{\mathcal{E}}_{kk})(t) \delta_{ij} + 2(\hat{\mu} * \dot{\mathcal{E}}_{ij})(t), \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde $*$ denota una convolución en tiempo.

Realizando un cálculo formal de la transformada de Fourier \mathcal{F} en (2.11) se obtiene

$$\begin{aligned} \Sigma_{ij}(\omega) &= \mathcal{F} \left((\hat{\lambda} * \dot{\mathcal{E}}_{kk})(t) \delta_{ij} \right) + \mathcal{F} \left(\hat{\mu} * \dot{\mathcal{E}}_{ij}(t) \right) \\ &= \mathcal{F}(\hat{\lambda}) \mathcal{F}(\dot{\mathcal{E}}_{kk}) \delta_{ij} + 2\mathcal{F}(\hat{\mu}) \mathcal{F}(\dot{\mathcal{E}}_{ij}), \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde Σ es el tensor de esfuerzo armónico. Teniendo en cuenta que $\mathcal{F}(\mathcal{E}) = E$, que $\mathcal{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{U}$ y las propiedades de la transformada de Fourier, de (2.12) se obtiene que

$$\Sigma_{ij}(\omega) = -i\omega \mathcal{F}(\hat{\lambda}) E_{kk} \delta_{ij} - 2i\omega \mathcal{F}(\hat{\mu}) E_{ij} = \lambda E_{kk} \delta_{ij} + 2\mu E_{ij}, \quad (2.13)$$

donde $\lambda = -i\omega \mathcal{F}(\hat{\lambda})$ y $\mu = -i\omega \mathcal{F}(\hat{\mu})$ son los coeficientes de Lamé dependientes de la frecuencia en el modelo de sólido visco-elástico.

Considerando (2.1) en el sólido visco-elástico e imponiendo soluciones armónicas se obtiene que

$$-\omega^2 \rho_s \mathbf{U} - \text{Div } \Sigma = \mathbf{0}, \quad (2.14)$$

donde ρ_s es la densidad de masa del sólido en el estado de referencia inicial.

Sustituyendo (2.13) en (2.14) se obtiene que la ecuación del movimiento en el sólido visco-elástico es

$$-\omega^2 \rho_s \mathbf{U} - \mu \Delta \mathbf{U} - (\mu + \lambda) \nabla \text{Div } \mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad (2.15)$$

donde λ y μ son los coeficientes de Lamé, dependientes de la frecuencia, asociados al material visco-elástico. Si se reescriben los coeficientes de Lamé en términos del Módulo de Young y del coeficiente de Poisson se obtiene (véase [22])

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.16)$$

2.1.3. Placa rígida

Se supone que la placa está situada en un plano. Si se denota por χ al desplazamiento normal de la placa, la ecuación del movimiento de la placa (véase [10]) es

$$m \frac{d^2 \chi}{dt^2}(t) + s \frac{d\chi}{dt}(t) + r\chi(t) = f(t),$$

donde m es la densidad superficial de masa, s el coeficiente de viscosidad, r coeficiente de elasticidad y f es la carga exterior superficial a la que está sometida la placa. Denotando por X el desplazamiento de la placa en el dominio de la frecuencia, es decir,

$$\chi(t) = \text{Re}(e^{-i\omega t} X),$$

entonces, la ecuación de la placa rígida en el dominio de la frecuencia resulta

$$-m\omega^2 X - i\omega s X + rX = F. \quad (2.17)$$

2.2. Ondas planas

En esta sección se va a considerar un tipo particular de solución de las ecuaciones (2.7) y (2.15): las ondas planas. Más precisamente, en el dominio de la frecuencia y en el caso bidimensional, se ha estudiado cómo diferentes ondas planas son solución de los modelos para fluidos compresibles y sólidos visco-elásticos.

2.2.1. Ondas planas para el fluido compresible

Supongamos que el campo de desplazamientos en el dominio de la frecuencia se puede escribir como

$$\mathbf{U} = \mathbf{a} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}}, \quad (2.18)$$

donde $\mathbf{a} \in \mathbb{C}$ es el vector amplitud de la onda plana, \mathbf{k} es el vector número de onda y \mathbf{p} es el vector posición.

Veamos qué relación debe haber entre \mathbf{a} y \mathbf{k} para que (2.18) sea solución de la ecuación (2.7). Como el campo de desplazamientos se puede escribir como se ha visto en (2.18), entonces¹

$$\text{Div } \mathbf{U} = \text{Div} \left(\mathbf{a} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}} \right) = (\mathbf{a} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}})_{j,j} = (a_j e^{ik_n p_n})_{,j} = i a_j k_j e^{ik_n p_n} = i \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}},$$

$$\nabla (\text{Div } \mathbf{U}) = \nabla \left(i \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}} \right) = -(\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}}.$$

Por tanto, la ecuación (2.7) se puede escribir como

$$-\omega^2 \rho_0 \mathbf{a} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}} + \rho_0 c_0^2 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}} = \mathbf{0},$$

es decir,

$$-\omega^2 \mathbf{a} + c_0^2 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} = \mathbf{0},$$

¹Se ha utilizado la notación $\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = \Phi_{,j}$ y la convención de que los subíndices repetidos suman.

de donde resulta que

$$\mathbf{k} = \frac{\omega^2 \mathbf{a}}{c_0^2 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{k})}. \quad (2.19)$$

Esto significa que \mathbf{k} y \mathbf{a} son paralelos y, por tanto,

$$|\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}| = |\mathbf{k}| \cdot |\mathbf{a}|. \quad (2.20)$$

Teniendo en cuenta (2.19) y (2.20) se obtiene

$$|\mathbf{k}| = \frac{\omega^2 |\mathbf{a}|}{c_0^2 |\mathbf{a}| |\mathbf{k}|} = \frac{\omega}{c_0},$$

por lo que

$$\mathbf{k} = \frac{\omega^2 \mathbf{a}}{c_0^2 |\mathbf{a}| |\mathbf{k}|} = \frac{\omega \mathbf{a}}{c_0 |\mathbf{a}|}. \quad (2.21)$$

La ecuación (2.21) indica qué relación debe existir entre \mathbf{k} y \mathbf{a} para que una onda plana sea solución de (2.7). Además, la velocidad de propagación de una onda plana es

$$c_0 = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|}, \quad (2.22)$$

que coincide con la velocidad del sonido en el fluido. Como se ha demostrado que \mathbf{a} es paralelo a \mathbf{k} entonces el vector desplazamiento de la onda tiene la misma dirección que el vector propagación, es decir, la onda plana en un fluido compresible es longitudinal.

2.2.2. Ondas planas para el sólido visco-elástico

Supongamos que el campo de desplazamientos, en el dominio de la frecuencia se puede escribir como

$$\mathbf{U} = \mathbf{a} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}, \quad (2.23)$$

donde $\mathbf{a} \in \mathbb{C}$ es la amplitud de la onda plana, \mathbf{k} es el vector número de onda y \mathbf{p} es el vector posición.

Veamos qué relación debe haber entre \mathbf{a} y \mathbf{k} para que (2.23) sea solución de la ecuación (2.15). La presión en el sólido visco-elástico se puede escribir como se ha visto en (2.23), entonces como se ha visto anteriormente

$$\text{Div } \mathbf{U} = i\mathbf{a} \cdot \mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}},$$

$$\nabla (\text{Div } \mathbf{U}) = -(\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}.$$

Además, como puede verse en [12],

$$\text{Div} (\nabla \mathbf{U} - \nabla \mathbf{U}^t) = \Delta \mathbf{U} - \text{Div} (\nabla \mathbf{U}^t) = \Delta \mathbf{U} - \nabla (\text{Div } \mathbf{U}).$$

Por tanto, el laplaciano se escribe como

$$\Delta \mathbf{U} = \text{Div} (\nabla \mathbf{U} - \nabla \mathbf{U}^t) + \nabla (\text{Div } \mathbf{U}) = -\mathbf{Rot} \mathbf{Rot} \mathbf{U}. \quad (2.24)$$

Teniendo en cuenta (2.24), la ecuación (2.15) se puede escribir como

$$-\omega^2 \rho_s \mathbf{U} + \mu \mathbf{Rot Rot U} - (2\mu + \lambda) \nabla (\text{Div } \mathbf{U}) = \mathbf{0}. \quad (2.25)$$

Por otro lado, se satisface

$$\begin{aligned} \mathbf{Rot U} &= \mathbf{Rot} \left(\mathbf{a} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}} \right) = \nabla \times \left(\mathbf{a} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}} \right) = \nabla e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}} \times \mathbf{a} = i\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}} \times \mathbf{a}, \\ \mathbf{Rot Rot U} &= \mathbf{Rot} \left(i\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}} \times \mathbf{a} \right) = \nabla \times \left(i\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}} \times \mathbf{a} \right) = \nabla i\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{a}) \\ &= -\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{a}). \end{aligned}$$

En consecuencia, la ecuación (2.25) se reescribe como

$$-\omega^2 \rho_s \left(\mathbf{a} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}} \right) - \mu \mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{a}) + (2\mu + \lambda) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}} = \mathbf{0}.$$

Simplificando el factor no nulo $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}$, se obtiene

$$-\omega^2 \rho_s \mathbf{a} - \mu (\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{a})) + (2\mu + \lambda) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} = \mathbf{0}. \quad (2.26)$$

Veamos ahora qué ocurre con los vectores \mathbf{k} y \mathbf{a} . Si \mathbf{k} y \mathbf{a} son paralelos, $\mathbf{a} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$ y, por tanto, la ecuación (2.26) se reduce a

$$-\omega^2 \rho_s \mathbf{a} + (2\mu + \lambda) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} = \mathbf{0},$$

es decir,

$$\mathbf{k} = \frac{\omega^2 \rho_s \mathbf{a}}{(2\mu + \lambda) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{k})}.$$

Como \mathbf{k} y \mathbf{a} son paralelos $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{k}|$ luego

$$|\mathbf{k}| = \frac{\omega^2 \rho_s |\mathbf{a}|}{(2\mu + \lambda) |\mathbf{a}| |\mathbf{k}|} = \omega \sqrt{\frac{\rho_s}{2\mu + \lambda}}.$$

Como la velocidad de propagación de las ondas planas se define por

$$c_p = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|}, \quad (2.27)$$

entonces

$$c_p = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho_s}}, \quad (2.28)$$

e introduciendo (2.16) en la ecuación (2.28) se obtiene

$$c_p = \sqrt{\frac{E(1 - \nu)}{\rho_s(1 - 2\nu)(1 + \nu)}}.$$

Estas ondas longitudinales se conocen como ondas P y su velocidad de propagación es la mostrada en (2.28).

Por otro lado, puede ocurrir que \mathbf{k} y \mathbf{a} sean perpendiculares. En ese caso, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = 0$ y por tanto, la ecuación (2.26) resulta

$$-\omega^2 \rho_s \mathbf{a} - \mu (\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{a})) = \mathbf{0}.$$

Teniendo en cuenta que $|\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{a})| = |\mathbf{k}|^2 |\mathbf{a}|$, entonces se obtiene que $|\mathbf{k}|^2 = \frac{\omega^2 \rho_s}{\mu}$. Como la velocidad de propagación de las ondas planas se define por

$$c_s = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|}, \quad (2.29)$$

entonces

$$c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_s}}, \quad (2.30)$$

e introduciendo (2.16) en la ecuación (2.30) se obtiene

$$c_s = \sqrt{\frac{E}{2\rho_s(1+\nu)}}.$$

Estas ondas transversales se conocen como ondas S y su velocidad de propagación es la mostrada en (2.30)

2.3. Problema multicapa

Si se considera un medio multicapa que está formado por un primer medio que es un fluido, un segundo medio que es un sólido visco-elástico y un tercer medio que es otro fluido, el desplazamiento complejo $\mathbf{U}(\mathbf{p})$ en cada uno de los medios viene dado por la combinación lineal de una onda plana incidente y una onda reflejada. En estos problemas se ha supuesto que ambos fluidos son no acotados y que el espesor del sólido visco-elástico es igual a L .

En el caso del fluido, el desplazamiento viene dado únicamente por una combinación lineal de ondas longitudinales, por lo que el desplazamiento complejo en el fluido compresible es

$$\mathbf{U}^F(\mathbf{p}) = C_1 e^{i(-k_1 p_1 + k_2 p_2)} \mathbf{d}_I + C_2 e^{i(k_1 p_1 + k_2 p_2)} \mathbf{d}_R, \quad (2.31)$$

donde p_1 y p_2 son las coordenadas del vector posición con respecto a la base canónica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, C_1 y C_2 son las amplitudes de la onda regresiva y progresiva, respectivamente, $\mathbf{k}_I = (-k_1, k_2)^t$ y $\mathbf{k}_R = (k_1, k_2)^t$ son los vectores que indican la dirección de propagación de la onda regresiva y progresiva, respectivamente y \mathbf{d}_I y \mathbf{d}_R son los vectores que indican la dirección de desplazamiento de la onda regresiva y progresiva, respectivamente. Al estar en el caso de ondas longitudinales se debe cumplir que $\mathbf{d}_I \parallel \mathbf{k}_I$ y $\mathbf{d}_R \parallel \mathbf{k}_R$ y la ecuación de dispersión $|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c_0}$.

En el caso del sólido visco-elástico, el desplazamiento viene dado por una combinación lineal de ondas longitudinales y ondas transversales. Así, el desplazamiento complejo en el sólido visco-elástico está dado por

$$\mathbf{U}^S(\mathbf{p}) = \mathbf{U}_p(\mathbf{p}) + \mathbf{U}_s(\mathbf{p}),$$

donde

$$\mathbf{U}_p(\mathbf{p}) = C_3 e^{i(-k_{1p}p_1 + k_{2p}p_2)} \mathbf{d}_{I_p} + C_4 e^{i(k_{1p}p_1 + k_{2p}p_2)} \mathbf{d}_{R_p}, \quad (2.32)$$

es el desplazamiento dado por las ondas longitudinales, con C_3 y C_4 las amplitudes de la onda regresiva y progresiva, respectivamente, $\mathbf{k}_{I_p} = (-k_{1p}, k_{2p})^t$ y $\mathbf{k}_{R_p} = (k_{1p}, k_{2p})^t$ son los vectores que indican la dirección de propagación de la onda regresiva y progresiva, respectivamente y \mathbf{d}_{I_p} y \mathbf{d}_{R_p} son los vectores que indican la dirección de desplazamiento de la onda regresiva y progresiva, respectivamente. Al estar en el caso de ondas longitudinales se debe cumplir que $\mathbf{d}_{I_p} \parallel \mathbf{k}_{I_p}$ y $\mathbf{d}_{R_p} \parallel \mathbf{k}_{R_p}$ y la ecuación de dispersión $|\mathbf{k}_{I_p}| = |\mathbf{k}_{R_p}| = \frac{\omega}{c_p}$. Adicionalmente,

$$\mathbf{U}_s(\mathbf{p}) = C_5 e^{i(-k_{1s}p_1 + k_{2s}p_2)} \mathbf{d}_{I_s} + C_6 e^{i(k_{1s}p_1 + k_{2s}p_2)} \mathbf{d}_{R_s}, \quad (2.33)$$

es el desplazamiento dado por las ondas transversales, con C_5 y C_6 las amplitudes de la onda regresiva y progresiva, respectivamente, $\mathbf{k}_{I_s} = (-k_{1s}, k_{2s})^t$ y $\mathbf{k}_{R_s} = (k_{1s}, k_{2s})^t$ son los vectores que indican la dirección de propagación de la onda regresiva y progresiva, respectivamente y \mathbf{d}_{I_s} y \mathbf{d}_{R_s} son los vectores que indican la dirección de desplazamiento de la onda regresiva y progresiva, respectivamente. Al estar en el caso de ondas transversales se debe cumplir que $\mathbf{d}_{I_s} \perp \mathbf{k}_{I_s}$ y $\mathbf{d}_{R_s} \perp \mathbf{k}_{R_s}$ y la ecuación de dispersión $|\mathbf{k}_{I_s}| = |\mathbf{k}_{R_s}| = \frac{\omega}{c_s}$.

En las subsecciones siguientes se van a detallar dichas ecuaciones tanto para incidencia normal como para incidencia oblicua.

2.3.1. Incidencia normal

Se considera el problema de propagación multicapa en incidencia normal (véase Figura 2.1), en el cual la dirección de propagación de las ondas planas es perpendicular al medio multicapa, es decir, el vector número de onda en el fluido es paralelo a \mathbf{e}_1 .

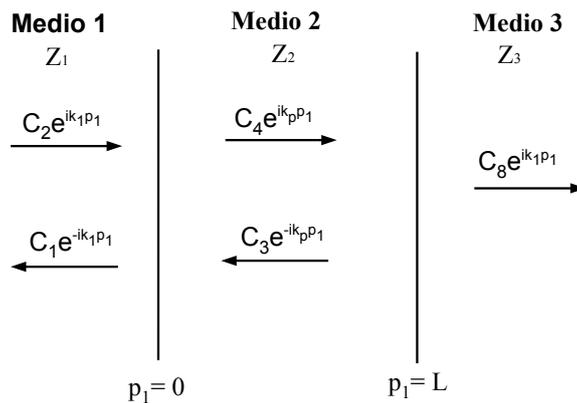


Figura 2.1: Esquema de la propagación de ondas planas con incidencia normal en una multicapa que involucra tres medios (cada uno con una impedancia característica asociada Z_j con $j = 1, 2, 3$).

Lo primero que se debe notar es que en el fluido todas las ondas planas son longitudinales, es decir, el vector desplazamiento es paralelo a la dirección de propagación de la onda luego, en (2.18) hay que tener en cuenta que $\mathbf{a} \parallel \mathbf{e}_1$ y por tanto,

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde $k_1 = \frac{\omega}{c_0}$, siendo c_0 la velocidad del sonido en el fluido. Es por esto que, siguiendo (2.31), el campo de desplazamientos complejo en el primer medio y en el tercer medio, ambos fluidos y de idénticas propiedades, viene dado, respectivamente, por

$$\mathbf{U}_1(\mathbf{p}) = (C_1 e^{-ik_1 p_1} + C_2 e^{ik_1 p_1}) \mathbf{e}_1, \quad (2.34)$$

$$\mathbf{U}_3(\mathbf{p}) = (C_7 e^{-ik_1 p_1} + C_8 e^{ik_1 p_1}) \mathbf{e}_1, \quad (2.35)$$

donde C_j , con $j = 1, 2, 7, 8$, son constantes complejas que modelan la reflexión y la transmisión entre las distintas capas. Además, en el primer fluido compresible la solución de ondas planas para el campo de presiones resulta

$$\Pi_1(\mathbf{p}) = \tilde{C}_1 e^{i(-k_1 p_1 + k_2 p_2)} + \tilde{C}_2 e^{i(k_1 p_1 + k_2 p_2)}, \quad (2.36)$$

donde \tilde{C}_1 y \tilde{C}_2 son las amplitudes en presiones de la onda regresiva y progresiva, respectivamente y en el tercer medio, que también es un fluido compresible con propiedades idénticas a las del primer medio, la solución de ondas planas en términos del campo de presiones resulta

$$\Pi_3(\mathbf{p}) = \tilde{C}_7 e^{i(-k_1 p_1 + k_2 p_2)} + \tilde{C}_8 e^{i(k_1 p_1 + k_2 p_2)}, \quad (2.37)$$

donde \tilde{C}_7 y \tilde{C}_8 son las amplitudes en presiones de la onda regresiva y progresiva, respectivamente.

En el sólido visco-elástico aparecen ondas planas longitudinales, en las que el vector desplazamiento es paralelo a la dirección de propagación de la onda, es decir, a partir de (2.23), y teniendo en cuenta que $\mathbf{a} \parallel \mathbf{e}_1$ resulta

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_p \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde $k_p = \frac{\omega}{c_p}$ y $c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_s}}$. En este modelo también aparecen ondas planas transversales, en las que el vector desplazamiento es perpendicular a la dirección de propagación de la onda, esto es, se satisface que

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{e}_1 \quad \text{y} \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_s \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde $k_s = \frac{\omega}{c_s}$ y $c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_s}}$. Por tanto, siguiendo (2.32) y (2.33), el campo de desplazamiento complejo en el segundo medio, que es un sólido visco-elástico, viene dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_2(\mathbf{p}) = \mathbf{U}_p(\mathbf{p}) + \mathbf{U}_s(\mathbf{p}) = & (C_3 e^{-ik_p p_1} + C_4 e^{ik_p p_1}) \mathbf{e}_1 \\ & + (C_5 e^{-ik_s p_1} + C_6 e^{ik_s p_1}) \mathbf{e}_2, \end{aligned} \quad (2.38)$$

donde C_j , con $j = 3, 4, 5, 6$, son constantes complejas que modelan la reflexión y transmisión entre las distintas capas.

2.3.2. Incidencia oblicua

Si se denota por $\beta_1 \in (0, \pi/2)$ al ángulo de incidencia de la onda en el fluido (el caso $\beta_1 = 0$ se corresponde con el problema de incidencia normal), el vector número de onda en el fluido es paralelo a $(\cos(\beta_1), \sin(\beta_1))^t$, por lo que, teniendo en cuenta (2.31), el desplazamiento complejo en el primer fluido compresible viene dado por

$$\mathbf{U}_1(\mathbf{p}) = (C_1 e^{i(-k_{11}p_1 + k_{21}p_2)} + C_2 e^{i(k_{11}p_1 + k_{21}p_2)}) \begin{pmatrix} \cos(\beta_1) \\ \sin(\beta_1) \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

donde C_j son constantes complejas que modelan la reflexión y la transmisión entre los medios 1 y 2. Además, como las ondas son longitudinales, el vector desplazamiento es paralelo a la dirección de propagación de la onda, es decir

$$\mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{21} \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} \cos(\beta_1) \\ \sin(\beta_1) \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Teniendo en cuenta (2.22) y (2.40) se obtiene

$$\mathbf{k}_1 = \frac{\omega}{c_0} \begin{pmatrix} \cos(\beta_1) \\ \sin(\beta_1) \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

El desplazamiento en el sólido visco-elástico es $\mathbf{U}_2(\mathbf{p}) = \mathbf{U}_p(\mathbf{p}) + \mathbf{U}_s(\mathbf{p})$. Por un lado, teniendo en cuenta (2.32), se obtiene

$$\mathbf{U}_p(\mathbf{p}) = (C_3 e^{i(-k_{1p}p_1 + k_{2p}p_2)} + C_4 e^{i(k_{1p}p_1 + k_{2p}p_2)}) \begin{pmatrix} \cos(\beta_p) \\ \sin(\beta_p) \end{pmatrix},$$

donde, como las ondas son longitudinales, el vector desplazamiento es paralelo a la dirección de propagación de la onda, es decir

$$\mathbf{k}_p = \begin{pmatrix} k_{1p} \\ k_{2p} \end{pmatrix} = k_p \begin{pmatrix} \cos(\beta_p) \\ \sin(\beta_p) \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

Teniendo en cuenta (2.27) y (2.42) se obtiene

$$\mathbf{k}_p = \frac{\omega}{c_p} \begin{pmatrix} \cos(\beta_p) \\ \sin(\beta_p) \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Por otro lado,

$$\mathbf{U}_s(\mathbf{p}) = (C_5 e^{i(-k_{1s}p_1 + k_{2s}p_2)} + C_6 e^{i(k_{1s}p_1 + k_{2s}p_2)}) \begin{pmatrix} -\sin(\beta_s) \\ \cos(\beta_s) \end{pmatrix},$$

donde, como las ondas son transversales, el vector desplazamiento es perpendicular a la dirección de propagación de la onda

$$\mathbf{k}_s = \begin{pmatrix} k_{1s} \\ k_{2s} \end{pmatrix} = k_s \begin{pmatrix} \cos(\beta_s) \\ \sin(\beta_s) \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Teniendo en cuenta (2.29) y (2.44) se obtiene

$$\mathbf{k}_s = \frac{\omega}{c_s} \begin{pmatrix} \cos(\beta_s) \\ \sin(\beta_s) \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

Por tanto, el desplazamiento complejo en el sólido visco-elástico resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_2(\mathbf{p}) &= \mathbf{U}_p(\mathbf{p}) + \mathbf{U}_s(\mathbf{p}) \\ &= \left(C_3 e^{i(-k_{1p}p_1 + k_{2p}p_2)} + C_4 e^{i(k_{1p}p_1 + k_{2p}p_2)} \right) \begin{pmatrix} \cos(\beta_p) \\ \sin(\beta_p) \end{pmatrix} \\ &\quad + \left(C_5 e^{i(-k_{1s}p_1 + k_{2s}p_2)} + C_6 e^{i(k_{1s}p_1 + k_{2s}p_2)} \right) \begin{pmatrix} -\sin(\beta_s) \\ \cos(\beta_s) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

donde \mathbf{k}_p y \mathbf{k}_s vienen dados por las expresiones (2.43) y (2.45) y C_j para $j = 3, 4, 5, 6$ son constantes complejas que modelan la reflexión y transmisión entre los medios 1, 2 y 3.

Si se realiza un razonamiento análogo al realizado para el primer medio se obtiene que en el tercer medio, que también es un fluido compresible con las mismas características que el primer medio, el desplazamiento complejo viene dado por

$$\mathbf{U}_3(\mathbf{p}) = \left(C_7 e^{i(-k_{13}p_1 + k_{23}p_2)} + C_8 e^{i(k_{13}p_1 + k_{23}p_2)} \right) \begin{pmatrix} \cos(\beta_3) \\ \sin(\beta_3) \end{pmatrix}, \quad (2.47)$$

donde C_j , para $j = 7, 8$, son constantes complejas que modelan la reflexión y la transmisión entre los medios 2 y 3. Además, como las ondas son longitudinales, se verifica que el vector desplazamiento es paralelo a la dirección de propagación de la onda, es decir

$$\mathbf{k}_3 = \begin{pmatrix} k_{13} \\ k_{23} \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} \cos(\beta_3) \\ \sin(\beta_3) \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

Teniendo en cuenta (2.22), (2.48) y que tanto el primer medio como el tercero tienen las mismas propiedades, se obtiene

$$\mathbf{k}_3 = \frac{\omega}{c_0} \begin{pmatrix} \cos(\beta_3) \\ \sin(\beta_3) \end{pmatrix}.$$

2.4. Condiciones de acople

Una vez vistos los modelos matemáticos que rigen cada medio y las soluciones en forma de ondas planas con incidencia normal y oblicua en dichos medios, se deben estudiar las condiciones de acoplamiento entre los medios que forman el problema de propagación de ondas. En todos los problemas a estudiar se considera que la interfaz Γ_1 está situada en $p_1 = 0$, esto es

$$\Gamma_1 = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_1 = 0\},$$

y que la interfaz Γ_2 está situada en $p_1 = L$, es decir,

$$\Gamma_2 = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_1 = L\}.$$

Ambas interfaces planas son perpendiculares al eje de abscisas, por lo que se toma el vector normal $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$.

2.4.1. Configuración sin placa

Se considera el problema de propagación acústica en un medio multicapa formado por un fluido compresible, un sólido visco-elástico y un fluido compresible (véase la Figura 2.1).

Las condiciones de acople entre un fluido compresible y un sólido visco-elástico vienen dadas por la continuidad de los desplazamientos normales en la interfaz y la continuidad de los esfuerzos normales, es decir,

$$\mathbf{U}^F(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{U}^S(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{n}, \quad (2.49)$$

$$-\Pi \mathbf{n} = \mathbf{C}(E(\mathbf{U}^S))\mathbf{n}. \quad (2.50)$$

Por tanto, las condiciones de acople (2.49) y (2.50) en cada una de las interfaces son

$$\mathbf{U}_1(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{U}_2(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} \text{ en } \Gamma_1, \quad (2.51)$$

$$-\Pi_1 \mathbf{n} = \mathbf{C}(E(\mathbf{U}_2))\mathbf{n} \text{ en } \Gamma_1, \quad (2.52)$$

$$\mathbf{U}_2(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{U}_3(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} \text{ en } \Gamma_2, \quad (2.53)$$

$$\mathbf{C}(E(\mathbf{U}_2))\mathbf{n} = -\Pi_3 \mathbf{n} \text{ en } \Gamma_2. \quad (2.54)$$

Además, en los fluidos compresibles 1 y 3 se satisface

$$\Pi_j = -\rho_0 c_0^2 \text{Div } \mathbf{U}_j, \quad \text{para } j = 1, 3, \quad (2.55)$$

mientras que en el sólido visco-elástico se satisface la relación

$$\mathbf{C}(E(\mathbf{U}_2)) = 2\mu E(\mathbf{U}_2) + \lambda \text{tr}(E(\mathbf{U}_2))\mathbf{I},$$

entonces

$$\mathbf{C}(E(\mathbf{U}_2))\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} (\mathbf{C}(E(\mathbf{U}_2)))_{11} \\ (\mathbf{C}(E(\mathbf{U}_2)))_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu E_{11}(\mathbf{U}_2) + \lambda \text{Div } \mathbf{U}_2 \\ 2\mu E_{12}(\mathbf{U}_2) \end{pmatrix}, \quad (2.56)$$

y así, considerando (2.55) y (2.56), se puede escribir (2.52) como

$$\begin{pmatrix} \rho_0 c_0^2 \text{Div } \mathbf{U}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu E_{11}(\mathbf{U}_2) + \lambda \text{Div } \mathbf{U}_2 \\ 2\mu E_{12}(\mathbf{U}_2) \end{pmatrix} \text{ en } \Gamma_1. \quad (2.57)$$

Del mismo modo, considerando (2.55) y (2.56), se puede escribir (2.54) como

$$\begin{pmatrix} 2\mu E_{11}(\mathbf{U}_2) + \lambda \text{Div } \mathbf{U}_2 \\ 2\mu E_{12}(\mathbf{U}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_0 c_0^2 \text{Div } \mathbf{U}_3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } \Gamma_2. \quad (2.58)$$

Incidencia normal

Se considera el problema de propagación multicapa con incidencia normal. Si se considera que la interfaz de contacto entre el primer fluido compresible y el sólido visco-elástico es Γ_1 , la ecuación (2.51), teniendo en cuenta (2.34) y (2.38) y evaluándola en $p_1 = 0$ resulta

$$C_1 + C_2 = C_3 + C_4. \quad (2.59)$$

Sabemos que, en incidencia normal, utilizando (2.34) y (2.38) se obtiene

$$\text{Div } \mathbf{U}_1 = ik_1(-C_1e^{-ik_1p_1} + C_2e^{ik_1p_1}), \quad (2.60)$$

$$\text{Div } \mathbf{U}_2 = ik_p(-C_3e^{-ik_pp_1} + C_4e^{ik_pp_1}), \quad (2.61)$$

$$E_{11}(\mathbf{U}_2) = ik_p(-C_3e^{-ik_pp_1} + C_4e^{ik_pp_1}), \quad (2.62)$$

$$E_{12}(\mathbf{U}_2) = \frac{i}{2}k_s(-C_5e^{-ik_sp_1} + C_6e^{ik_sp_1}), \quad (2.63)$$

y, por tanto, la ecuación (2.57) resulta

$$\begin{aligned} \rho_0c_0^2k_1(-C_1e^{-ik_1p_1} + C_2e^{ik_1p_1}) &= (2\mu + \lambda)k_p(-C_3e^{-ik_pp_1} + C_4e^{ik_pp_1}), \\ 0 &= \mu k_s(-C_5e^{-ik_sp_1} + C_6e^{ik_sp_1}). \end{aligned}$$

Por último, evaluando estas últimas ecuaciones en $p_1 = 0$ se obtiene

$$\rho_0c_0^2k_1(-C_1 + C_2) = (2\mu + \lambda)k_p(-C_3 + C_4), \quad (2.64)$$

$$\mu k_s(-C_5 + C_6) = 0. \quad (2.65)$$

Por otro lado, se estudian las ecuaciones de acople entre el sólido visco-elástico y el segundo fluido en la interfaz Γ_2 . La ecuación (2.53) se reescribe como

$$C_3e^{-ik_pL} + C_4e^{ik_pL} = C_7e^{-ik_1L} + C_8e^{ik_1L}. \quad (2.66)$$

En incidencia normal, utilizando la expresión (2.35) se obtiene

$$\text{Div } \mathbf{U}_3 = ik_1(-C_7e^{-ik_1p_1} + C_8e^{ik_1p_1}). \quad (2.67)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (2.61)-(2.63) y (2.67), la ecuación (2.58) resulta

$$\begin{aligned} (2\mu + \lambda)k_p(-C_3e^{-ik_pp_1} + C_4e^{ik_pp_1}) &= \rho_0c_0^2k_1(-C_7e^{-ik_1p_1} + C_8e^{ik_1p_1}), \\ \mu k_s(-C_5e^{-ik_sp_1} + C_6e^{ik_sp_1}) &= 0. \end{aligned}$$

Por último, evaluándolas en $p_1 = L$ se obtiene

$$(2\mu + \lambda)k_p(-C_3e^{-ik_pL} + C_4e^{ik_pL}) = \rho_0c_0^2k_1(-C_7e^{-ik_1L} + C_8e^{ik_1L}), \quad (2.68)$$

$$\mu k_s(-C_5e^{-ik_sL} + C_6e^{ik_sL}) = 0. \quad (2.69)$$

De (2.65) y (2.69) se deduce que $C_5 = 0$ y $C_6 = 0$ lo que significa que en incidencia normal en el sólido visco-elástico sólo aparecen ondas longitudinales.

Para modelar que no existen ondas planas que se propagan del medio 3 al sólido visco-elástico se usa la condición de radiación siguiente:

$$\lim_{p_1 \rightarrow +\infty} \left(\frac{\partial \mathbf{U}_3}{\partial p_1} - ik_1 \mathbf{U}_3 \right) = \mathbf{0},$$

lo que implica, utilizando la ecuación (2.35), que $C_7 = 0$. Por tanto, el sistema lineal que se debe resolver para determinar todas las constantes que determinan las ondas

planas en los tres medios, viene dado por las ecuaciones (2.59), (2.64), (2.66) y (2.68), es decir,

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 - C_3 - C_4 = -C_2, \\ \rho_0 c_0^2 k_1 C_1 - (2\mu + \lambda) k_p C_3 + (2\mu + \lambda) k_p C_4 = \rho_0 c_0^2 k_1 C_2, \\ e^{-ik_p L} C_3 + e^{ik_p L} C_4 - e^{ik_1 L} C_8 = 0, \\ (2\mu + \lambda) k_p e^{-ik_p L} C_3 - (2\mu + \lambda) k_p e^{ik_p L} C_4 + \rho_0 c_0^2 k_1 e^{ik_1 L} C_8 = 0, \end{array} \right. \quad (2.70)$$

donde C_2 es la amplitud de la onda incidente que se propaga del primer medio al resto, la cual ha sido asumida como conocida.

Incidencia oblicua

Se considera ahora el problema de propagación de ondas planas con incidencia oblicua a través de un medio multicapa formado por tres medios, con un ángulo de incidencia $\beta_1 \in (0, \pi/2)$. Si se considera que la interfaz de contacto entre el primer fluido compresible y el sólido visco-elástico es Γ_1 , la ecuación que se obtiene al imponer la continuidad de los desplazamientos normales como se indica en (2.51), utilizando (2.39) y (2.46) es

$$\begin{aligned} & \left(C_1 e^{i(-k_1 p_1 + k_2 p_2)} + C_2 e^{i(k_1 p_1 + k_2 p_2)} \right) \cos(\beta_1) \\ &= \left(C_3 e^{i(-k_{1p} p_1 + k_{2p} p_2)} + C_4 e^{i(k_{1p} p_1 + k_{2p} p_2)} \right) \cos(\beta_p) \\ & \quad - \left(C_5 e^{i(-k_{1s} p_1 + k_{2s} p_2)} + C_6 e^{i(k_{1s} p_1 + k_{2s} p_2)} \right) \sin(\beta_s). \end{aligned} \quad (2.71)$$

Evaluando (2.71) en $p_1 = 0$, se obtiene

$$e^{ik_2 p_2} (C_1 + C_2) \cos(\beta_1) = e^{ik_{2p} p_2} (C_3 + C_4) \cos(\beta_p) - e^{ik_{2s} p_2} (C_5 + C_6) \sin(\beta_s). \quad (2.72)$$

La continuidad de los desplazamientos normales debe cumplirse a lo largo de toda la interfaz Γ_1 , es decir, se debe satisfacer (2.72) para todo $p_2 \in \mathbb{R}$, lo cual implica

$$k_2 = k_{2p} = k_{2s}, \quad (2.73)$$

de donde resulta, simplificando las expresiones que dependen de la variable p_2 en (2.72),

$$(C_1 + C_2) \cos(\beta_1) = (C_3 + C_4) \cos(\beta_p) - (C_5 + C_6) \sin(\beta_s). \quad (2.74)$$

Sabemos que, en incidencia oblicua, utilizando (2.39) y (2.46), se obtiene

$$\begin{aligned} \text{Div } \mathbf{U}_1 = i & \left[k_{11} (-C_1 e^{-ik_{11} p_1 + k_{21} p_2} + C_2 e^{ik_{11} p_1 + k_{21} p_2}) \cos(\beta_1) \right. \\ & \left. + k_{21} (C_1 e^{-ik_{11} p_1 + k_{21} p_2} + C_2 e^{ik_{11} p_1 + k_{21} p_2}) \sin(\beta_1) \right], \end{aligned} \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned} \text{Div } \mathbf{U}_2 = i \left[C_3 e^{i(-k_{1p}p_1 + k_{2p}p_2)} (-k_{1p} \cos(\beta_p) + k_{2p} \sin(\beta_p)) \right. \\ + C_4 e^{i(k_{1p}p_1 + k_{2p}p_2)} (k_{1p} \cos(\beta_p) + k_{2p} \sin(\beta_p)) \\ + C_5 e^{i(-k_{1s}p_1 + k_{2s}p_2)} (k_{1s} \sin(\beta_s) + k_{2s} \cos(\beta_s)) \\ \left. + C_6 e^{i(-k_{1s}p_1 + k_{2s}p_2)} (-k_{1s} \sin(\beta_s) + k_{2s} \cos(\beta_s)) \right], \quad (2.76) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{11}(\mathbf{U}_2) = i \left[k_{1p} \left(-C_3 e^{i(-k_{1p}p_1 + k_{2p}p_2)} + C_4 e^{i(k_{1p}p_1 + k_{2p}p_2)} \right) \cos(\beta_p) \right. \\ \left. + k_{1s} \left(C_5 e^{i(-k_{1s}p_1 + k_{2s}p_2)} - C_6 e^{i(-k_{1s}p_1 + k_{2s}p_2)} \right) \sin(\beta_s) \right], \quad (2.77) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{12}(\mathbf{U}_2) = \frac{i}{2} \left[C_3 e^{i(-k_{1p}p_1 + k_{2p}p_2)} (-k_{1p} \sin(\beta_p) + k_{2p} \cos(\beta_p)) \right. \\ + C_4 e^{i(k_{1p}p_1 + k_{2p}p_2)} (k_{1p} \sin(\beta_p) + k_{2p} \cos(\beta_p)) \\ - C_5 e^{i(-k_{1s}p_1 + k_{2s}p_2)} (k_{1s} \cos(\beta_s) + k_{2s} \sin(\beta_s)) \\ \left. + C_6 e^{i(-k_{1s}p_1 + k_{2s}p_2)} (k_{1s} \cos(\beta_s) - k_{2s} \sin(\beta_s)) \right], \quad (2.78) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Div } \mathbf{U}_3 = i \left[k_{13} (-C_7 e^{-ik_{13}p_1 + k_{23}p_2} + C_8 e^{ik_{13}p_1 + k_{23}p_2}) \cos(\beta_3) \right. \\ \left. + k_{23} (C_7 e^{-ik_{13}p_1 + k_{23}p_2} + C_8 e^{ik_{13}p_1 + k_{23}p_2}) \sin(\beta_3) \right]. \quad (2.79) \end{aligned}$$

Por otro lado, de la ecuación (2.57) para incidencia oblicua, utilizando las ecuaciones (2.75)-(2.78) y evaluando en $p_1 = 0$, resultan las ecuaciones

$$\begin{aligned} e^{ik_2p_2} \rho_0 c_0^2 [k_1 (-C_1 + C_2) \cos(\beta_1) + k_2 (C_1 + C_2) \sin(\beta_1)] \\ = e^{ik_2p_2} [(2\mu + \lambda) k_{1p} (-C_3 + C_4) \cos(\beta_p) + \lambda k_{2p} (C_3 + C_4) \sin(\beta_p)] \\ + e^{ik_2s p_2} [(2\mu + \lambda) k_{1s} (C_5 - C_6) \sin(\beta_s) + \lambda k_{2s} (C_5 + C_6) \cos(\beta_s)], \quad (2.80) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = \mu \left[e^{ik_2p_2} (k_{2p} (C_3 + C_4) \cos(\beta_p) + k_{1p} (-C_3 + C_4) \sin(\beta_p)) \right. \\ \left. + e^{ik_2s p_2} (k_{2s} (-C_5 - C_6) \sin(\beta_s) + k_{1s} (-C_5 + C_6) \cos(\beta_s)) \right]. \quad (2.81) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta de nuevo que la continuidad de los esfuerzos normales (2.80) y (2.81) deben darse en todos los puntos de la interfaz Γ_1 , se cumple de nuevo (2.73) y se obtiene, simplificando el factor $e^{ik_2p_2} \neq 0$ para todo $p_2 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \rho_0 c_0^2 [k_1 (-C_1 + C_2) \cos(\beta_1) + k_2 (C_1 + C_2) \sin(\beta_1)] \\ = [(2\mu + \lambda) k_{1p} (-C_3 + C_4) \cos(\beta_p) + \lambda k_{2p} (C_3 + C_4) \sin(\beta_p)] \\ + [(2\mu + \lambda) k_{1s} (C_5 - C_6) \sin(\beta_s) + \lambda k_{2s} (C_5 + C_6) \cos(\beta_s)], \quad (2.82) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = \mu \left[(k_{2p} (C_3 + C_4) \cos(\beta_p) + k_{1p} (-C_3 + C_4) \sin(\beta_p)) \right. \\ \left. + (k_{2s} (-C_5 - C_6) \sin(\beta_s) + k_{1s} (-C_5 + C_6) \cos(\beta_s)) \right]. \quad (2.83) \end{aligned}$$

Por otro lado, se deben estudiar las ecuaciones de acople entre el sólido visco-elástico y el segundo fluido. Si se tienen en cuenta las ecuaciones (2.46) y (2.47), considerando la ecuación (2.53) sobre la interfaz de contacto Γ_2 resulta

$$\begin{aligned} e^{ik_{2p}p_2} \left(C_3 e^{-ik_{1p}p_1} + C_4 e^{ik_{1p}p_1} \right) \cos(\beta_p) - e^{ik_{2s}p_2} \left(C_5 e^{-ik_{1s}p_1} + C_6 e^{ik_{1s}p_1} \right) \sin(\beta_s) \\ = e^{ik_{23}p_2} \left(C_7 e^{-ik_{13}p_1} + C_8 e^{ik_{13}p_1} \right) \cos(\beta_3), \end{aligned}$$

y evaluándola en $p_1 = L$ se obtiene

$$\begin{aligned} e^{ik_{2p}p_2} \left(C_3 e^{-ik_{1p}L} + C_4 e^{ik_{1p}L} \right) \cos(\beta_p) - e^{ik_{2s}p_2} \left(C_5 e^{-ik_{1s}L} + C_6 e^{ik_{1s}L} \right) \sin(\beta_s) \\ = e^{ik_{23}p_2} \left(C_7 e^{-ik_{13}L} + C_8 e^{ik_{13}L} \right) \cos(\beta_3). \quad (2.84) \end{aligned}$$

La continuidad de los desplazamientos normales debe cumplirse a lo largo de toda la interfaz Γ_2 , es decir, se debe satisfacer (2.84) para todo $p_2 \in \mathbb{R}$, lo que implica que

$$k_{2p} = k_{2s} = k_{23}, \quad (2.85)$$

y por tanto, simplificando el factor $e^{ik_{2p}p_2} \neq 0$ para todo $p_2 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \left(C_3 e^{-ik_{1p}L} + C_4 e^{ik_{1p}L} \right) \cos(\beta_p) - \left(C_5 e^{-ik_{1s}L} + C_6 e^{ik_{1s}L} \right) \sin(\beta_s) \\ = \left(C_7 e^{-ik_{13}L} + C_8 e^{ik_{13}L} \right) \cos(\beta_3). \quad (2.86) \end{aligned}$$

Por otro lado, de la ecuación (2.58) para incidencia oblicua, utilizando las ecuaciones (2.76)-(2.78) y (2.79) y evaluando en $p_1 = L$ resultan las ecuaciones

$$\begin{aligned} e^{ik_{2p}p_2} \left[(2\mu + \lambda)k_{1p}(-C_3 e^{-ik_{1p}L} + C_4 e^{ik_{1p}L}) \cos(\beta_p) \right. \\ \left. + \lambda k_{2p}(C_3 e^{-ik_{1p}L} + C_4 e^{ik_{1p}L}) \sin(\beta_p) \right] \\ + e^{ik_{2s}p_2} \left[(2\mu + \lambda)k_{1s}(C_5 e^{-ik_{1s}L} - C_6 e^{ik_{1s}L}) \sin(\beta_s) \right. \\ \left. + \lambda k_{2s}(C_5 e^{-ik_{1s}L} + C_6 e^{ik_{1s}L}) \cos(\beta_s) \right] \\ = e^{ik_{23}p_2} \rho_0 c_0^2 \left[k_{13}(-C_7 e^{-ik_{13}L} + C_8 e^{ik_{13}L}) \cos(\beta_3) + k_{23}(C_7 e^{-ik_{13}L} + C_8 e^{ik_{13}L}) \sin(\beta_3) \right], \quad (2.87) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = \mu \left[e^{ik_{2p}p_2} (k_{2p}(C_3 e^{-ik_{1p}L} + C_4 e^{ik_{1p}L}) \cos(\beta_p) + k_{1p}(-C_3 e^{-ik_{1p}L} + C_4 e^{ik_{1p}L}) \sin(\beta_p)) \right. \\ \left. + e^{ik_{2s}p_2} (k_{2s}(-C_5 e^{-ik_{1s}L} - C_6 e^{ik_{1s}L}) \sin(\beta_s) + k_{1s}(-C_5 e^{-ik_{1s}L} + C_6 e^{ik_{1s}L}) \cos(\beta_s)) \right]. \quad (2.88) \end{aligned}$$

Considerando de nuevo que la continuidad de los esfuerzos normales (2.87) y (2.88) debe darse para todos los puntos de la interfaz Γ_2 , se verifica la igualdad (2.85) y por

tanto, se obtiene simplificando el factor $e^{ik_{2p}p_2} \neq 0$ para todo $p_2 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & (2\mu + \lambda) \left[k_{1p}(-C_3e^{-ik_{1p}L} + C_4e^{ik_{1p}L}) \cos(\beta_p) + k_{1s}(C_5e^{-ik_{1s}L} - C_6e^{ik_{1s}L}) \sin(\beta_s) \right] \\ & + \lambda \left[k_{2p}(C_3e^{-ik_{1p}L} + C_4e^{ik_{1p}L}) \sin(\beta_p) + k_{2s}(C_5e^{-ik_{1s}L} + C_6e^{ik_{1s}L}) \cos(\beta_s) \right] \\ & = \rho_0 c_0^2 \left[k_{13}(-C_7e^{-ik_{13}L} + C_8e^{ik_{13}L}) \cos(\beta_3) + k_{23}(C_7e^{-ik_{13}L} + C_8e^{ik_{13}L}) \sin(\beta_3) \right], \end{aligned} \quad (2.89)$$

$$\begin{aligned} 0 = \mu & \left[k_{2p}(C_3e^{-ik_{1p}L} + C_4e^{ik_{1p}L}) \cos(\beta_p) + k_{1p}(-C_3e^{-ik_{1p}L} + C_4e^{ik_{1p}L}) \sin(\beta_p) \right. \\ & \left. + k_{2s}(-C_5e^{-ik_{1s}L} - C_6e^{ik_{1s}L}) \sin(\beta_s) + k_{1s}(-C_5e^{-ik_{1s}L} + C_6e^{ik_{1s}L}) \cos(\beta_s) \right]. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Para modelar que no existen ondas planas con incidencia oblicua que se propagan del medio fluido 3 hacia el sólido visco-elástico se considera la siguiente condición de radiación:

$$\lim_{p_1 \rightarrow +\infty} \left(\frac{\partial \mathbf{U}_3}{\partial p_1} - ik_1 \cos(\beta_3) \mathbf{U}_3 \right) = \mathbf{0},$$

lo que implica, considerando la ecuación (2.47) que $C_7 = 0$.

Por tanto, el sistema lineal a resolver, donde las incógnitas son las constantes C_j con $j = 1, \dots, 8$ que determinan las ondas planas, es el formado por las ecuaciones (2.74), (2.82), (2.83), (2.86), (2.89) y (2.90), es decir,

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(\beta_1)C_1 - \cos(\beta_p)C_3 - \cos(\beta_p)C_4 + \sin(\beta_s)C_5 + \sin(\beta_s)C_6 = -C_2 \cos(\beta_1), \\ \rho_0 c_0^2 \mathbf{k}_1 \cdot \begin{pmatrix} -\cos(\beta_1) \\ \sin(\beta_1) \end{pmatrix} C_1 + \mathbf{k}_p \cdot \begin{pmatrix} (2\mu + \lambda) \cos(\beta_p) \\ -\lambda \sin(\beta_p) \end{pmatrix} C_3 - \mathbf{k}_p \cdot \begin{pmatrix} (2\mu + \lambda) \cos(\beta_p) \\ \lambda \sin(\beta_p) \end{pmatrix} C_4 \\ -\mathbf{k}_s \cdot \begin{pmatrix} (2\mu + \lambda) \sin(\beta_s) \\ \lambda \cos(\beta_s) \end{pmatrix} C_5 + \mathbf{k}_s \cdot \begin{pmatrix} (2\mu + \lambda) \sin(\beta_s) \\ -\lambda \cos(\beta_s) \end{pmatrix} C_6 = -\rho_0 c_0^2 \mathbf{k}_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta_1) \\ \sin(\beta_1) \end{pmatrix} C_2, \\ \mu \left[\mathbf{k}_p \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\beta_p) \\ \cos(\beta_p) \end{pmatrix} C_3 + \mathbf{k}_p \cdot \begin{pmatrix} \sin(\beta_p) \\ \cos(\beta_p) \end{pmatrix} C_4 - \mathbf{k}_s \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta_s) \\ \sin(\beta_s) \end{pmatrix} C_5 + \mathbf{k}_s \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta_s) \\ -\sin(\beta_s) \end{pmatrix} C_6 \right] = 0 \\ e^{-ik_{1p}L} \cos(\beta_p)C_3 + e^{ik_{1p}L} \cos(\beta_p)C_4 - e^{-ik_{1s}L} \sin(\beta_s)C_5 - e^{ik_{1s}L} \sin(\beta_s)C_6 \\ - e^{ik_{13}L} \cos(\beta_3)C_8 = 0 \\ e^{-ik_{1p}L} \mathbf{k}_p \cdot \begin{pmatrix} -(2\mu + \lambda) \cos(\beta_p) \\ \lambda \sin(\beta_p) \end{pmatrix} C_3 + e^{ik_{1p}L} \mathbf{k}_p \cdot \begin{pmatrix} (2\mu + \lambda) \cos(\beta_p) \\ \lambda \sin(\beta_p) \end{pmatrix} C_4 \\ + e^{-ik_{1s}L} \mathbf{k}_s \cdot \begin{pmatrix} (2\mu + \lambda) \sin(\beta_s) \\ \lambda \cos(\beta_s) \end{pmatrix} C_5 + e^{ik_{1s}L} \mathbf{k}_s \cdot \begin{pmatrix} -(2\mu + \lambda) \sin(\beta_s) \\ \lambda \cos(\beta_s) \end{pmatrix} C_6 \\ - \rho_0 c_0^2 e^{ik_{13}L} \mathbf{k}_3 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta_3) \\ \sin(\beta_3) \end{pmatrix} C_8 = 0, \\ \mu \left[e^{-ik_{1p}L} \mathbf{k}_p \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\beta_p) \\ \cos(\beta_p) \end{pmatrix} C_3 + e^{ik_{1p}L} \mathbf{k}_p \cdot \begin{pmatrix} \sin(\beta_p) \\ \cos(\beta_p) \end{pmatrix} C_4 - e^{-ik_{1s}L} \mathbf{k}_s \cdot \begin{pmatrix} -\cos(\beta_s) \\ -\sin(\beta_s) \end{pmatrix} C_5 \right. \\ \left. + e^{ik_{1s}L} \mathbf{k}_s \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta_s) \\ -\sin(\beta_s) \end{pmatrix} C_6 \right] = 0, \end{array} \right. \quad (2.91)$$

donde C_2 es la amplitud de la onda incidente en el primer fluido compresible que se propaga al resto de los medios, la cual ha sido asumida como conocida.

2.4.2. Configuración con placa rígida

Se considera ahora el problema de propagación acústica en un medio multicapa formado por un fluido compresible, un sólido visco-elástico, una placa rígida y un fluido compresible.

En lo que sigue, se analiza la propagación de ondas planas tanto para incidencia normal como para incidencia oblicua. En ambos casos, al igual que en la configuración anterior la interfaz Γ_1 está situada en $p_1 = 0$ y la interfaz Γ_2 está situada en $p_1 = L$.

Las condiciones de acople entre un fluido compresible y un sólido visco-elástico vienen dadas por la continuidad de los desplazamientos normales en la interfaz y la continuidad de los esfuerzos normales. Por tanto, las condiciones de acople son

$$\mathbf{U}_1(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{U}_2(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} \text{ en } \Gamma_1, \quad (2.92)$$

$$-\Pi_1 \mathbf{n} = C(E(\mathbf{U}_2))\mathbf{n} \text{ en } \Gamma_1, \quad (2.93)$$

Además, como se ha visto en la configuración sin placa, en un fluido compresible se satisface (2.55) y en un sólido visco-elástico se satisface (2.56). Por tanto, se puede escribir (2.93) como

$$\begin{pmatrix} \rho_0 c_0^2 \text{Div } \mathbf{U}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu E_{11}(\mathbf{U}_2) + \lambda \text{Div } \mathbf{U}_2 \\ 2\mu E_{12}(\mathbf{U}_2) \end{pmatrix} \text{ en } \Gamma_1. \quad (2.94)$$

La condición de continuidad de los desplazamientos normales en Γ_2 resulta

$$\mathbf{U}_2(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{U}_3(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} \text{ en } \Gamma_2, \quad (2.95)$$

Por otro lado, la fuerza resultante \mathbf{F} que actúa sobre la placa, es la diferencia de las tensiones normales de cada uno de los medios que separa la placa. Por tanto,

$$\mathbf{F} = -\Pi_3 \mathbf{n} - C(E(\mathbf{U}_2))\mathbf{n}. \quad (2.96)$$

Así, teniendo en cuenta (2.17) y (2.96) se puede escribir la continuidad de los esfuerzos normales en Γ_2 como

$$-\Pi_3 \mathbf{n} - C(E(\mathbf{U}_2))\mathbf{n} = (-m\omega^2 - i\omega s + r)\mathbf{U}_3 \text{ en } \Gamma_2. \quad (2.97)$$

Considerando de nuevo (2.55) y (2.56), se puede escribir (2.97) como

$$\begin{pmatrix} 2\mu E_{11}(\mathbf{U}_2) + \lambda \text{Div } \mathbf{U}_2 \\ 2\mu E_{12}(\mathbf{U}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_0 c_0^2 \text{Div } \mathbf{U}_3 \\ 0 \end{pmatrix} - (-m\omega^2 - i\omega s + r)\mathbf{U}_3 \text{ en } \Gamma_2. \quad (2.98)$$

Incidencia normal

Se considera el problema de propagación multicapa en la configuración con placa con incidencia normal. Si se considera que la interfaz de contacto entre el primer fluido

compresible y el sólido visco-elástico es Γ_1 , la ecuación (2.92), teniendo en cuenta (2.34) y (2.38) y evaluando en $p_1 = 0$ resulta

$$C_1 + C_2 = C_3 + C_4. \quad (2.99)$$

Se sabe que, en incidencia normal, se verifican (2.60)-(2.63) y por tanto, la ecuación (2.94) resulta

$$\begin{aligned} \rho_0 c_0^2 k_1 (-C_1 e^{-ik_1 p_1} + C_2 e^{ik_1 p_1}) &= (2\mu + \lambda) k_p (-C_3 e^{-ik_p p_1} + C_4 e^{ik_p p_1}), \\ 0 &= \mu k_s (-C_5 e^{-ik_s p_1} + C_6 e^{ik_s p_1}), \end{aligned}$$

y, evaluándolas en $p_1 = 0$ se obtiene

$$\rho_0 c_0^2 k_1 (-C_1 + C_2) = (2\mu + \lambda) k_p (-C_3 + C_4), \quad (2.100)$$

$$\mu k_s (-C_5 + C_6) = 0. \quad (2.101)$$

Por otro lado, se han estudiado las ecuaciones de acople entre el sólido visco-elástico y el segundo fluido en la interfaz de contacto Γ_2 . La ecuación (2.95), teniendo en cuenta (2.38), (2.35) y evaluando en $p_1 = L$ se reescribe como

$$C_3 e^{-ik_p L} + C_4 e^{ik_p L} = C_7 e^{-ik_1 L} + C_8 e^{ik_1 L}. \quad (2.102)$$

Teniendo en cuenta (2.61)-(2.63) y (2.67), la ecuación (2.98) resulta

$$\begin{aligned} (2\mu + \lambda) k_p (-C_3 e^{-ik_p p_1} + C_4 e^{ik_p p_1}) &= C_7 e^{-ik_1 p_1} (-\rho_0 c_0^2 k_1 - im\omega^2 + \omega s + ir) \\ &\quad + C_8 e^{ik_1 p_1} (\rho_0 c_0^2 k_1 - im\omega^2 + \omega s + ir), \\ \mu k_s (-C_5 e^{-ik_s p_1} + C_6 e^{ik_s p_1}) &= 0. \end{aligned}$$

Evaluándola en $p_1 = L$ se obtiene

$$\begin{aligned} (2\mu + \lambda) k_p (-C_3 e^{-ik_p L} + C_4 e^{ik_p L}) &= C_7 e^{-ik_1 L} (-\rho_0 c_0^2 k_1 - im\omega^2 + \omega s + ir) \\ &\quad + C_8 e^{ik_1 L} (\rho_0 c_0^2 k_1 - im\omega^2 + \omega s + ir), \end{aligned} \quad (2.103)$$

$$\mu k_s (-C_5 e^{-ik_s L} + C_6 e^{ik_s L}) = 0. \quad (2.104)$$

De (2.101) y (2.104) se obtiene que $C_5 = 0$ y $C_6 = 0$, por lo que se deduce que en el sólido visco-elástico y en incidencia normal, no existen ondas transversales.

Para modelar que no existen ondas planas que se propagan del medio 3 al sólido visco-elástico se usa la condición de radiación siguiente:

$$\lim_{p_1 \rightarrow +\infty} \left(\frac{\partial U_3}{\partial p_1} - ik_1 U_3 \right) = \mathbf{0},$$

lo que implica, utilizando la ecuación (2.35) que $C_7 = 0$. Por tanto, el sistema lineal que se debe resolver para determinar todas las constantes que determinan las ondas planas en los tres medios viene dado por las expresiones (2.99), (2.100), (2.102) y (2.103), es decir,

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 - C_3 - C_4 = -C_2, \\ \rho_0 c_0^2 k_1 C_1 - (2\mu + \lambda) k_p C_3 + (2\mu + \lambda) k_p C_4 = \rho_0 c_0^2 k_1 C_2, \\ e^{-ik_p L} C_3 + e^{ik_p L} C_4 - e^{ik_1 L} C_8 = 0, \\ (2\mu + \lambda) k_p e^{-ik_p L} C_3 - (2\mu + \lambda) k_p e^{ik_p L} C_4 \\ \quad + e^{ik_1 L} (\rho_0 c_0^2 k_1 - im\omega^2 + \omega s + ir) C_8 = 0, \end{array} \right. \quad (2.105)$$

donde C_2 es la amplitud de la onda incidente que se propaga del primer medio al resto, la cual ha sido asumida como conocida.

Incidencia oblicua

Se considera ahora el problema de propagación de ondas planas en la configuración con placa rígida en incidencia oblicua a través de un medio multicapa formado por tres medios, con un ángulo de incidencia $\beta_1 \in (0, \pi/2)$. Si se considera que la interfaz de contacto entre el primer fluido compresible y el sólido visco-elástico es Γ_1 , la ecuación que se obtiene al imponer la continuidad de los desplazamientos normales, como se indica en (2.51) y utilizando (2.39) y (2.46), es

$$\begin{aligned} & \left(C_1 e^{i(-k_1 p_1 + k_2 p_2)} + C_2 e^{i(k_1 p_1 + k_2 p_2)} \right) \cos(\beta_1) \\ &= \left(C_3 e^{i(-k_{1p} p_1 + k_{2p} p_2)} + C_4 e^{i(k_{1p} p_1 + k_{2p} p_2)} \right) \cos(\beta_p) \\ & \quad - \left(C_5 e^{i(-k_{1s} p_1 + k_{2s} p_2)} + C_6 e^{i(k_{1s} p_1 + k_{2s} p_2)} \right) \sin(\beta_s). \end{aligned} \quad (2.106)$$

Evaluando (2.106) en $p_1 = 0$ se obtiene

$$e^{ik_2 p_2} (C_1 + C_2) \cos(\beta_1) = e^{ik_p p_2} (C_3 + C_4) \cos(\beta_p) - e^{ik_s p_2} (C_5 + C_6) \sin(\beta_s). \quad (2.107)$$

La continuidad de los desplazamientos normales debe darse a lo largo de toda la interfaz Γ_1 , es decir, la ecuación (2.107) se debe satisfacer para todo $p_2 \in \mathbb{R}$, lo cual implica

$$k_2 = k_{2p} = k_{2s}, \quad (2.108)$$

de donde resulta, simplificando las expresiones que dependen de la variable p_2 en (2.107),

$$(C_1 + C_2) \cos(\beta_1) = (C_3 + C_4) \cos(\beta_p) - (C_5 + C_6) \sin(\beta_s). \quad (2.109)$$

Teniendo en cuenta que, en incidencia oblicua, se verifica (2.75)-(2.78), al considerar la ecuación (2.94) y evaluarla en $p_1 = 0$ se obtiene

$$\begin{aligned} & e^{ik_2 p_2} \rho_0 c_0^2 (k_{11}(-C_1 + C_2) \cos(\beta_1) + k_{21}(C_1 + C_2) \sin(\beta_1)) \\ &= e^{ik_{2p} p_2} ((2\mu + \lambda)k_{1p}(-C_3 + C_4) \cos(\beta_p) + \lambda k_{2p}(C_3 + C_4) \sin(\beta_p)) \\ & \quad + e^{ik_{2s} p_2} ((2\mu + \lambda)k_{1s}(C_5 - C_6) \sin(\beta_s) + \lambda k_{2s}(C_5 + C_6) \cos(\beta_s)), \end{aligned} \quad (2.110)$$

$$\begin{aligned} & \mu \left[e^{ik_{2p} p_2} (k_{2p}(C_3 + C_4) \cos(\beta_p) + k_{1p}(-C_3 + C_4) \sin(\beta_p)) \right. \\ & \quad \left. + e^{ik_{2s} p_2} (k_{2s}(-C_5 - C_6) \sin(\beta_s) + k_{1s}(-C_5 + C_6) \cos(\beta_s)) \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.111)$$

Teniendo en cuenta de nuevo que la continuidad de los esfuerzos normales (2.110) y (2.111) deben darse en todos los puntos de la interfaz Γ_1 , se cumple de nuevo (2.108) y se obtiene, simplificando el factor $e^{ik_{2p} p_2} \neq 0$ para todo $p_2 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & \rho_0 c_0^2 (k_{11}(-C_1 + C_2) \cos(\beta_1) + k_{21}(C_1 + C_2) \sin(\beta_1)) \\ &= (2\mu + \lambda)k_{1p}(-C_3 + C_4) \cos(\beta_p) + \lambda k_{2p}(C_3 + C_4) \sin(\beta_p) \\ & \quad + (2\mu + \lambda)k_{1s}(C_5 - C_6) \sin(\beta_s) + \lambda k_{2s}(C_5 + C_6) \cos(\beta_s), \end{aligned} \quad (2.112)$$

$$\begin{aligned} \mu [k_{2p}(C_3 + C_4) \cos(\beta_p) + k_{1p}(-C_3 + C_4) \sin(\beta_p) \\ + k_{2s}(-C_5 - C_6) \sin(\beta_s) + k_{1s}(-C_5 + C_6) \cos(\beta_s)] = 0. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Por otro lado, se deben estudiar las ecuaciones de acople entre el sólido visco-elástico y el segundo fluido compresible en la interfaz Γ_2 . Si se tienen en cuenta las ecuaciones (2.46) y (2.47), considerando la ecuación (2.95) sobre la interfaz de contacto Γ_2 resulta

$$\begin{aligned} e^{ik_{2p}p_2} \left(C_3 e^{-ik_{1p}p_1} + C_4 e^{ik_{1p}p_1} \right) \cos(\beta_p) - e^{ik_{2s}p_2} \left(C_5 e^{-ik_{1s}p_1} + C_6 e^{ik_{1s}p_1} \right) \sin(\beta_s) \\ = e^{ik_{23}p_2} \left(C_7 e^{-ik_{13}p_1} + C_8 e^{ik_{13}p_1} \right) \cos(\beta_3), \end{aligned}$$

y, evaluándola en $p_1 = L$ se obtiene

$$\begin{aligned} e^{ik_{2p}p_2} \left(C_3 e^{-ik_{1p}L} + C_4 e^{ik_{1p}L} \right) \cos(\beta_p) - e^{ik_{2s}p_2} \left(C_5 e^{-ik_{1s}L} + C_6 e^{ik_{1s}L} \right) \sin(\beta_s) \\ = e^{ik_{23}p_2} \left(C_7 e^{-ik_{13}L} + C_8 e^{ik_{13}L} \right) \cos(\beta_3). \end{aligned}$$

La continuidad de los desplazamientos normales debe cumplirse a lo largo de toda la interfaz Γ_2 , es decir, se debe satisfacer (2.107) para todo $p_2 \in \mathbb{R}$, lo que implica que

$$k_{2p} = k_{2s} = k_{23}. \quad (2.114)$$

Por tanto, simplificando el factor $e^{ik_{2p}p_2} \neq 0$ para todo $p_2 \in \mathbb{R}$, resulta

$$\begin{aligned} \left(C_3 e^{-ik_{1p}L} + C_4 e^{ik_{1p}L} \right) \cos(\beta_p) - \left(C_5 e^{-ik_{1s}L} + C_6 e^{ik_{1s}L} \right) \sin(\beta_s) \\ = \left(C_7 e^{-ik_{13}L} + C_8 e^{ik_{13}L} \right) \cos(\beta_3). \end{aligned} \quad (2.115)$$

Por otro lado, de la ecuación (2.98), utilizando las ecuaciones (2.76)-(2.78) y (2.79) y evaluándolas en $p_1 = L$, resultan las ecuaciones

$$\begin{aligned} e^{ik_{2p}p_2} \left[(2\mu + \lambda)k_{1p}(-C_3 e^{-ik_{1p}L} + C_4 e^{ik_{1p}L}) \cos(\beta_p) + \lambda k_{2p}(C_3 e^{-ik_{1p}L} + C_4 e^{ik_{1p}L}) \sin(\beta_p) \right] \\ + e^{ik_{2s}p_2} \left[(2\mu + \lambda)k_{1s}(C_5 e^{-ik_{1s}L} - C_6 e^{ik_{1s}L}) \sin(\beta_s) + \lambda k_{2s}(C_5 e^{-ik_{1s}L} + C_6 e^{ik_{1s}L}) \cos(\beta_s) \right] \\ = e^{ik_{23}p_2} e^{ik_{13}L} \left[\rho_0 c_0^2 (k_{13} \cos(\beta_3) + k_{23} \sin(\beta_3)) - (im\omega^2 - \omega s - ir) \cos(\beta_3) \right], \end{aligned} \quad (2.116)$$

$$\begin{aligned} \mu \left[e^{ik_{2p}p_2} (k_{2p}(C_3 e^{-ik_{1p}L} + C_4 e^{ik_{1p}L}) \cos(\beta_p) + k_{1p}(-C_3 e^{-ik_{1p}L} + C_4 e^{ik_{1p}L}) \sin(\beta_p)) \right. \\ \left. + e^{ik_{2s}p_2} (k_{2s}(-C_5 e^{-ik_{1s}L} - C_6 e^{ik_{1s}L}) \sin(\beta_s) + k_{1s}(-C_5 e^{-ik_{1s}L} + C_6 e^{ik_{1s}L}) \cos(\beta_s)) \right] \\ - e^{ik_{23}p_2} (im\omega^2 - \omega s - ir) C_8 e^{ik_{13}L} \sin(\beta_3) = 0. \end{aligned} \quad (2.117)$$

Considerando de nuevo que la continuidad de los esfuerzos normales (2.116) y (2.117) debe darse para todos los puntos de la interfaz Γ_2 se verifica la igualdad (2.114) y por tanto, se obtiene simplificando el factor $e^{ik_{2p}p_2} \neq 0$ para todo $p_2 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \left[(2\mu + \lambda)k_{1p}(-C_3 e^{-ik_{1p}L} + C_4 e^{ik_{1p}L}) \cos(\beta_p) + \lambda k_{2p}(C_3 e^{-ik_{1p}L} + C_4 e^{ik_{1p}L}) \sin(\beta_p) \right] \\ + \left[(2\mu + \lambda)k_{1s}(C_5 e^{-ik_{1s}L} - C_6 e^{ik_{1s}L}) \sin(\beta_s) + \lambda k_{2s}(C_5 e^{-ik_{1s}L} + C_6 e^{ik_{1s}L}) \cos(\beta_s) \right] \\ = e^{ik_{13}L} \left[\rho_0 c_0^2 (k_{13} \cos(\beta_3) + k_{23} \sin(\beta_3)) - (im\omega^2 - \omega s - ir) \cos(\beta_3) \right], \end{aligned} \quad (2.118)$$

$$\begin{aligned} \mu \left[k_{2p}(C_3 e^{-ik_{1p}L} + C_4 e^{ik_{1p}L}) \cos(\beta_p) + k_{1p}(-C_3 e^{-ik_{1p}L} + C_4 e^{ik_{1p}L}) \sin(\beta_p) \right. \\ \left. + k_{2s}(-C_5 e^{-ik_{1s}L} - C_6 e^{ik_{1s}L}) \sin(\beta_s) + k_{1s}(-C_5 e^{-ik_{1s}L} + C_6 e^{ik_{1s}L}) \cos(\beta_s) \right] \\ - (im\omega^2 - \omega s - ir) C_8 e^{ik_{13}L} \sin(\beta_3) = 0. \quad (2.119) \end{aligned}$$

Para modelar que no existen ondas planas con incidencia oblicua que se propagan del medio fluido 3 hacia el sólido visco-elástico se considera la siguiente condición de radiación:

$$\lim_{p_1 \rightarrow +\infty} \left(\frac{\partial \mathbf{U}_3}{\partial p_1} - ik_1 \cos(\beta_3) \mathbf{U}_3 \right) = \mathbf{0},$$

lo que implica, considerando la ecuación (2.47) que $C_7 = 0$.

Por tanto, el sistema lineal a resolver donde las incógnitas son las constantes C_j con $j = 1, \dots, 8$ que determinan las ondas planas, es el formado por las ecuaciones (2.109), (2.112), (2.113), (2.115), (2.118) y (2.119), es decir,

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(\beta_1)C_1 - \cos(\beta_p)C_3 - \cos(\beta_p)C_4 + \sin(\beta_s)C_5 + \sin(\beta_s)C_6 = -\cos(\beta_1)C_2, \\ \rho_0 c_0^2 \mathbf{k}_1 \cdot \begin{pmatrix} -\cos(\beta_1) \\ \sin(\beta_1) \end{pmatrix} C_1 + \mathbf{k}_p \cdot \begin{pmatrix} (2\mu + \lambda) \cos(\beta_p) \\ -\lambda \sin(\beta_p) \end{pmatrix} C_3 - \mathbf{k}_p \cdot \begin{pmatrix} (2\mu + \lambda) \cos(\beta_p) \\ \lambda \sin(\beta_p) \end{pmatrix} C_4 \\ -\mathbf{k}_s \cdot \begin{pmatrix} (2\mu + \lambda) \sin(\beta_s) \\ \lambda \cos(\beta_s) \end{pmatrix} C_5 + \mathbf{k}_s \cdot \begin{pmatrix} (2\mu + \lambda) \sin(\beta_s) \\ -\lambda \cos(\beta_s) \end{pmatrix} C_6 = -\rho_0 c_0^2 \mathbf{k}_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta_1) \\ \sin(\beta_1) \end{pmatrix} C_2, \\ \mu \mathbf{k}_p \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\beta_p) \\ \cos(\beta_p) \end{pmatrix} C_3 + \mu \mathbf{k}_p \cdot \begin{pmatrix} \sin(\beta_p) \\ \cos(\beta_p) \end{pmatrix} C_4 + \mu \mathbf{k}_s \cdot \begin{pmatrix} -\cos(\beta_s) \\ -\sin(\beta_s) \end{pmatrix} C_5 + \mu \mathbf{k}_s \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta_s) \\ -\sin(\beta_s) \end{pmatrix} C_6 = 0, \\ e^{-ik_{1p}L} \cos(\beta_p)C_3 + e^{ik_{1p}L} \cos(\beta_p)C_4 - e^{-ik_{1s}L} \sin(\beta_s)C_5 - e^{ik_{1s}L} \sin(\beta_s)C_6 \\ - e^{ik_{13}L} \cos(\beta_3)C_8 = 0, \\ e^{-ik_{1p}L} \mathbf{k}_p \cdot \begin{pmatrix} -(2\mu + \lambda) \cos(\beta_p) \\ \lambda \sin(\beta_p) \end{pmatrix} C_3 + e^{ik_{1p}L} \mathbf{k}_p \cdot \begin{pmatrix} (2\mu + \lambda) \cos(\beta_p) \\ \lambda \sin(\beta_p) \end{pmatrix} C_4 \\ + e^{-ik_{1s}L} \mathbf{k}_s \cdot \begin{pmatrix} (2\mu + \lambda) \sin(\beta_s) \\ \lambda \cos(\beta_s) \end{pmatrix} C_5 + e^{ik_{1s}L} \mathbf{k}_s \cdot \begin{pmatrix} -(2\mu + \lambda) \sin(\beta_s) \\ \lambda \cos(\beta_s) \end{pmatrix} C_6 \\ - e^{ik_{13}L} \left[\rho_0 c_0^2 \mathbf{k}_3 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta_3) \\ \sin(\beta_3) \end{pmatrix} - (im\omega^2 - \omega s - ir) \cos(\beta_3) \right] C_8 = 0, \\ \mu e^{-ik_{1p}L} \mathbf{k}_p \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\beta_p) \\ \cos(\beta_p) \end{pmatrix} C_3 + \mu e^{ik_{1p}L} \mathbf{k}_p \cdot \begin{pmatrix} \sin(\beta_p) \\ \cos(\beta_p) \end{pmatrix} C_4 - \mu e^{-ik_{1s}L} \mathbf{k}_s \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta_s) \\ \sin(\beta_s) \end{pmatrix} C_5 \\ + \mu e^{ik_{1s}L} \mathbf{k}_s \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta_s) \\ -\sin(\beta_s) \end{pmatrix} C_6 - e^{ik_{13}L} (im\omega^2 - \omega s - ir) \sin(\beta_3) C_8 = 0, \end{array} \right. \quad (2.120)$$

donde C_2 es la amplitud de la onda incidente en el primer fluido compresible que se propaga al resto de los medios, la cual ha sido asumida como conocida.

2.5. Niveles y coeficientes acústicos

Para resolver el problema de propagación multicapa tanto en incidencia normal como en incidencia oblicua se han resuelto los sistemas de ecuaciones lineales que aparecen

en el problema de la propagación acústica de ondas planas a través de un medio multicapa, tanto para la configuración sin placa rígida (véanse (2.70) y (2.91)) como para la configuración con placa (véase (2.105) y (2.120)). Una vez resueltos estos sistemas lineales, se han calculado los coeficientes y niveles que se definen a continuación:

Definición 2.1 (Coeficiente de reflexión). *El coeficiente de reflexión en la interfaz Γ_1 es el cociente del valor cuadrático medio de la presión reflejada y la presión incidente, es decir,*

$$|\mathcal{R}| = \frac{(\pi_r)_{\text{rms}}}{(\pi_i)_{\text{rms}}} \Big|_{\Gamma_1}, \quad (2.121)$$

donde π_r y π_i son la presión reflejada y la presión incidente en el primer medio fluido, respectivamente. El valor cuadrático medio (o valor RMS) de la presión π viene dado por

$$(\pi)_{\text{rms}}(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \pi^2(\mathbf{p}, t) dt},$$

donde $T = \frac{2\pi}{\omega}$ es el período de los campos armónicos, siendo ω la frecuencia angular.

Más precisamente, en el caso de la propagación de ondas planas, considerando (2.36), se obtiene que

$$\begin{aligned} \pi_i(\mathbf{p}, t) &= \text{Re} \left(e^{-i\omega t} \tilde{C}_2 e^{ik_1 p_1} \right), \\ \pi_r(\mathbf{p}, t) &= \text{Re} \left(e^{-i\omega t} \tilde{C}_1 e^{-ik_1 p_1} \right), \end{aligned}$$

y por tanto, $\mathcal{R} = \left| \frac{\tilde{C}_1}{\tilde{C}_2} \right|$.

Definición 2.2 (Coeficiente de transmisión). *El coeficiente de transmisión se define como el cociente del valor cuadrático medio de la presión transmitida y la presión incidente.*

$$|\mathcal{T}| = \frac{(\pi_t)_{\text{rms}}}{(\pi_i)_{\text{rms}}}, \quad (2.122)$$

donde π_t es la presión transmitida en el tercer medio fluido y π_i la presión incidente en el primer medio.

Más precisamente, en el caso la propagación de ondas planas, considerando (2.37), se obtiene que

$$\begin{aligned} \pi_i(\mathbf{p}, t) &= \text{Re} \left(e^{-i\omega t} \tilde{C}_2 e^{ik_1 p_1} \right), \\ \pi_t(\mathbf{p}, t) &= \text{Re} \left(e^{-i\omega t} \tilde{C}_8 e^{-ik_1 p_1} \right), \end{aligned}$$

y por tanto, $\mathcal{T} = \left| \frac{\tilde{C}_8}{\tilde{C}_2} \right|$.

Definición 2.3 (Nivel de reducción de eco). *El nivel de reducción de eco se define como*

$$\text{ER} = -20 \log_{10}(|\mathcal{R}|), \quad (2.123)$$

donde \mathcal{R} es el coeficiente de reflexión definido según la ecuación (2.121).

Este nivel proporciona una medida de lo que se reduce el sonido incidente después de reflejarse en la plancha visco-elástica.

Definición 2.4 (Pérdida por inserción). *La pérdida por inserción se define como*

$$\text{IL} = -20 \log_{10}(|\mathcal{T}|), \quad (2.124)$$

donde \mathcal{T} es el coeficiente de transmisión definido según la ecuación (2.122).

Este nivel representa la reducción que sufre la señal al insertar la plancha.

Definición 2.5 (Coeficiente de disipación de potencia). *El coeficiente de disipación de potencia se define como*

$$\text{FPD} = 1 - |\mathcal{R}|^2 - |\mathcal{T}|^2, \quad (2.125)$$

donde \mathcal{R} y \mathcal{T} que son los coeficientes de reflexión y transmisión, respectivamente, los cuales vienen definidos por las ecuaciones (2.121) y (2.122), respectivamente.

Este coeficiente representa la fracción de la potencia acústica incidente que no es ni reflejada ni transmitida. Evidentemente, todas estas definiciones deben ser entendidas en el marco de trabajo de las ondas planas armónicas.

2.5.1. Validación

Para determinar las amplitudes de las ondas planas C_j , $j = 1, \dots, 8$, los coeficientes \mathcal{R} y \mathcal{T} y los niveles ER, IL y FPD, se han realizado una serie de test con los que validar la implementación en MATLAB de estos cálculos. En lo que sigue, se describe cada uno de los test que se han realizado:

- (i) Se han comparado los resultados numéricos obtenidos con la implementación del programa que resuelve la propagación de ondas planas en incidencia normal con los obtenidos en el caso de incidencia oblicua considerando que el ángulo de incidencia es $\beta_1 = 0$ rad. Se ha comprobado que los resultados son idénticos. En este caso, con $\beta_1 = 0$ se tiene que

$$\mathbf{k}_1 = \frac{\omega}{c_0} \begin{pmatrix} \cos(\beta_1) \\ \sin(\beta_1) \end{pmatrix} = \frac{\omega}{c_0} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{k}_{11} = \mathbf{k}_1.$$

A partir de (2.73) y (2.85), se obtiene que

$$0 = \frac{\omega}{c_p} \sin(\beta_p) = \frac{\omega}{c_s} \sin(\beta_s) = \frac{\omega}{c_0} \sin(\beta_3),$$

es decir, $0 = \sin(\beta_p) = \sin(\beta_s) = \sin(\beta_3)$. Como se considera que todos los ángulos están entre 0 y $\pi/2$ entonces

$$\beta_1 = \beta_p = \beta_s = \beta_3 = 0,$$

y como consecuencia, $\mathbf{k}_{13} = \mathbf{k}_1$. Teniendo en cuenta (2.41), (2.43) y (2.45) se obtiene que $\mathbf{k}_1 = \frac{\omega}{c_0} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{k}_p = \frac{\omega}{c_p} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{k}_s = \frac{\omega}{c_s} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Por tanto, el sistema de incidencia oblicua (2.91) es $A\vec{C} = \vec{b}$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \rho_0 c_0^2 k_1 & -(2\mu + \lambda)k_p & (2\mu + \lambda)k_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu k_s & \mu k_s & 0 \\ 0 & e^{-ik_p L} & e^{ik_p L} & 0 & 0 & -e^{ik_1 L} \\ 0 & (2\mu + \lambda)k_p e^{-ik_p L} & -(2\mu + \lambda)k_p e^{ik_p L} & 0 & 0 & \rho_0 c_0^2 k_1 e^{ik_1 L} \\ 0 & 0 & 0 & -\mu k_s e^{-ik_s L} & \mu k_s e^{ik_s L} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_8 \end{pmatrix} \text{ y } \vec{b} = \begin{pmatrix} -C_2 \\ \rho_0 c_0^2 k_1 C_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde C_2 es la amplitud de la onda incidente en el primer medio fluido. Es claro que dicho sistema es equivalente al sistema de incidencia normal (2.70).

- (ii) Se ha considerado un test donde se ha incrementado la densidad de masa del sólido a valores muy altos, para obtener $|\mathcal{R}| \approx 1$ y $|\mathcal{T}| \approx 0$. Teniendo en cuenta la definición (2.121) y (2.122), se necesita conocer el valor de C_1 y C_8 que son las amplitudes de la onda reflejada en el primer medio fluido y de la onda transmitida en el tercer medio fluido, respectivamente, obtenidas a partir del sistema de incidencia normal (2.70). Estas soluciones son

$$C_1 = \frac{C_2 i (\rho_0^2 c_0^4 k_1^2 - (2\mu + \lambda)^2 k_p^2) \sin(k_p L)}{i (\rho_0^2 c_0^4 k_1^2 + (2\mu + \lambda)^2 k_p^2) \sin(k_p L) + (-2\rho_0 c_0^2 k_1 (2\mu + \lambda) k_p) \cos(k_p L)},$$

$$C_8 = \frac{-2\rho_0 c_0^2 k_1 (2\mu + \lambda) k_p}{e^{ik_1 L} (i \sin(k_p L) (\rho_0^2 c_0^4 k_1^2 + (2\mu + \lambda)^2 k_p^2) + \cos(k_p L) (-2\rho_0 c_0^2 k_1 (2\mu + \lambda) k_p))}.$$

Por tanto,

$$|\mathcal{R}| = \left| \frac{C_1}{C_2} \right| = \left| \frac{i (\rho_0^2 c_0^4 k_1^2 - (2\mu + \lambda)^2 k_p^2) \sin(k_p L)}{i (\rho_0^2 c_0^4 k_1^2 + (2\mu + \lambda)^2 k_p^2) \sin(k_p L) + (-2\rho_0 c_0^2 k_1 (2\mu + \lambda) k_p) \cos(k_p L)} \right|,$$

y así

$$|\mathcal{R}| = \frac{i(A - B\rho_s) \sin(k_p L)}{i(A + B\rho_s) \sin(k_p L) - C\sqrt{\rho_s} \cos(k_p L)} \xrightarrow{\rho_s \rightarrow \infty} 1,$$

donde $A = \rho_0^2 c_0^4 k_1^2$, $B = (2\mu + \lambda)^2$ y $C = -2\rho_0 c_0^2 k_1 (2\mu + \lambda)$ son constantes independientes de ρ_s .

Por otro lado, con un razonamiento análogo, se obtiene

$$|\mathcal{T}| = \left| \frac{C_8}{C_2} \right| = \left| \frac{-2\rho_0 c_0^2 k_1 (2\mu + \lambda) k_p}{e^{ik_1 L} (i \sin(k_p L) (\rho_0^2 c_0^4 k_1^2 + (2\mu + \lambda)^2 k_p^2) - 2 \cos(k_p L) \rho_0 c_0^2 k_1 (2\mu + \lambda) k_p)} \right|,$$

y por tanto,

$$|\mathcal{T}| = \left| \frac{C \sqrt{\rho_s}}{e^{ik_1 L} (i \sin(k_p L) (A + B \rho_s) + \cos(k_p L) (C \sqrt{\rho_s}))} \right| \xrightarrow{\rho_s \rightarrow \infty} 0,$$

donde A , B , C son constantes independientes de ρ_s .

- (iii) Se ha considerado un test en el que las propiedades del sólido visco-elástico satisfacen ciertas relaciones para obtener $|\mathcal{R}| = 0$ y $|\mathcal{T}| = 1$. Más precisamente, si

$$\begin{cases} \rho_s = \rho_0, \\ 2\mu + \lambda = \rho_0 c_0^2, \\ \mu = 0, \end{cases}$$

entonces

$$k_p = \frac{\omega}{c_p} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho_s}}} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\rho_0 c_0^2}{\rho_0}}} = \frac{\omega}{c_0} = k_1.$$

En este caso, el sistema de incidencia normal (2.70) es

$$\begin{cases} C_1 - C_3 - C_4 = -C_2, \\ C_1 - C_3 + C_4 = C_2, \\ e^{-ik_p L} C_3 + e^{ik_p L} C_4 - e^{ik_1 L} C_8 = 0, \\ -e^{-ik_p L} C_3 + e^{ik_p L} C_4 - e^{ik_1 L} C_8 = 0. \end{cases}$$

Este sistema tiene como solución $C_1 = 0$, $C_3 = 0$, $C_4 = C_2$ y $C_8 = C_2$. Por tanto, utilizando las definiciones (2.121) y (2.122), obtenemos $|\mathcal{R}| = 0$ y $|\mathcal{T}| = 1$

- (iv) Se ha considerado un problema de incidencia normal con tres medios fluidos compresibles, donde el primero y el último tienen las mismas características físicas. La validación se ha realizado al comparar la solución numérica con la obtenida a partir de la expresión del coeficiente de transmisión y reflexión mostrada en [16] para un problema multicapa con tres fluidos de diferentes características. Como indica [16],

$$\mathcal{R} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{\left(1 - \frac{Z_1}{Z_3}\right) \cos(k_2 L) + i \left(\frac{Z_2}{Z_3} - \frac{Z_1}{Z_3}\right) \sin(k_2 L)}{\left(1 + \frac{Z_1}{Z_3}\right) \cos(k_2 L) + i \left(\frac{Z_2}{Z_3} + \frac{Z_1}{Z_3}\right) \sin(k_2 L)}, \quad (2.126)$$

donde Z_j , $j = 1, 2, 3$ son las impedancias características de cada uno de los tres fluidos que están en contacto, k_2 es el número de onda del segundo medio y L es la distancia entre las dos interfaces existentes (véase la Figura 2.1). Teniendo

en cuenta que, en nuestro caso, tanto el primer medio como el último tienen las mismas propiedades, entonces $Z_1 = Z_3$. Al sustituir en (2.126), se obtiene

$$|\mathcal{R}| = \left| \frac{i \left(\frac{Z_2}{Z_1} - \frac{Z_1}{Z_2} \right) \sin(k_2 L)}{2 \cos(k_2 L) + i \left(\frac{Z_2}{Z_1} + \frac{Z_1}{Z_2} \right) \sin(k_2 L)} \right|.$$

Además, según [16], se obtiene

$$|\mathcal{T}| = \sqrt{\left| \frac{4}{\left(2 + \frac{Z_3}{Z_1} + \frac{Z_1}{Z_3} \right) \cos^2(k_2 L) + \left(\frac{Z_2^2}{Z_1 Z_3} + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2^2} \right) \sin^2(k_2 L)} \right|}. \quad (2.127)$$

Al tener en cuenta que, el primer y el último medio tienen las mismas propiedades $Z_1 = Z_3$ y así (2.127) se convierte en

$$|\mathcal{T}| = \sqrt{\left| \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{Z_2}{Z_1} - \frac{Z_1}{Z_2} \right)^2 \sin^2(k_2 L)} \right|}.$$

De la misma forma se ha validado la resolución numérica del problema de propagación acústica de ondas planas, que involucra un medio multicapa, similar al anterior, donde en la parte posterior de la capa de material visco-elástico se sitúa una placa rígida. Al igual que en el caso anterior, se ha realizado la implementación tanto para incidencia normal como para incidencia oblicua, calculando las amplitudes de las ondas planas en cada medio. La validación incluye tres problemas test:

- (v) Se han comparado los resultados numéricos obtenidos con la implementación que resuelve la propagación de ondas planas en incidencia normal con placa rígida con aquellos que se corresponden con el caso de incidencia oblicua con placa rígida, considerando el ángulo de incidencia $\beta_1 = 0$. Se ha comprobado que los resultados son idénticos. Puesto que $\beta_1 = 0$ se tiene

$$\mathbf{k}_1 = \frac{\omega}{c_0} \begin{pmatrix} \cos(\beta_1) \\ \sin(\beta_1) \end{pmatrix} = \frac{\omega}{c_0} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

y, a partir de (2.73) y (2.85), se obtiene que

$$0 = \frac{\omega}{c_p} \sin(\beta_p) = \frac{\omega}{c_s} \sin(\beta_s) = \frac{\omega}{c_0} \sin(\beta_3),$$

es decir, $0 = \sin(\beta_p) = \sin(\beta_s) = \sin(\beta_3)$. Como se considera que todos los ángulos están entre 0 y $\pi/2$ entonces

$$\beta_1 = \beta_p = \beta_s = \beta_3 = 0.$$

Teniendo en cuenta (2.41), (2.43) y (2.45) se obtiene que $\mathbf{k}_1 = \frac{\omega}{c_0} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{k}_p = \frac{\omega}{c_p} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{k}_s = \frac{\omega}{c_s} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Por tanto, el sistema de incidencia oblicua con placa (2.120) viene dado por

$$\begin{cases} C_1 - C_3 - C_4 = -C_2, \\ -\rho_0 c_0^2 k_{11} C_1 + (2\mu + \lambda) k_{1p} C_3 - (2\mu + \lambda) k_{1p} C_4 = -\rho_0 c_0^2 k_{11} C_2, \\ e^{-ik_{1p}L} C_3 + e^{ik_{1p}L} C_4 - e^{ik_{13}L} C_8 = 0, \\ -(2\mu + \lambda) k_{1p} e^{-ik_{1p}L} C_3 + (2\mu + \lambda) k_{1p} e^{ik_{1p}L} C_4 \\ - e^{ik_{13}L} (\rho_0 c_0^2 k_{31} - (im\omega^2 - \omega s - ir)) C_8 = 0. \end{cases}$$

Puesto que el primer y el último fluido tienen las mismas propiedades, entonces

$$k_{11} = \frac{\omega}{c_0} = k_{31}$$

y queda probado que el sistema es equivalente al sistema de incidencia normal con placa (2.105).

- (vi) Se ha realizado un test en el que las propiedades del sólido visco-elástico satisfacen ciertas relaciones con las que se obtienen $|\mathcal{R}|$ y $|\mathcal{T}|$ en función únicamente de los coeficientes m , s y r de la placa. Más precisamente, si

$$\begin{cases} \rho_s = \rho_0, \\ 2\mu + \lambda = \rho_0 c_0^2, \\ \mu = 0, \end{cases} ,$$

entonces, el medio multicapa se puede considerar como formado por la secuencia de medios fluido-fluido-placa-fluido donde los tres fluidos tienen las mismas propiedades. Esto supone que

$$k_p = \frac{\omega}{c_p} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{2\mu+\lambda}{\rho_s}}} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\rho_0 c_0^2}{\rho_0}}} = \frac{\omega}{c_0} = k_1.$$

En este caso, el sistema de incidencia normal con placa (2.105) viene dado por

$$\begin{cases} C_1 - C_3 - C_4 = C_2, \\ C_1 - C_3 + C_4 = C_2, \\ e^{-ik_1L} C_3 + e^{ik_1L} C_4 - e^{ik_1L} C_8 = 0, \\ e^{-ik_1L} C_3 - e^{ik_1L} C_4 + e^{ik_1L} \left(1 + \frac{m\omega^2 + i\omega s - r}{\rho_0 c_0^2 ik_1}\right) C_8 = 0. \end{cases}$$

La solución de este sistema es

$$\begin{aligned} C_1 &= C_3 = e^{2ik_1L} C_2 \frac{-m\omega^2 - i\omega s + r}{2\rho_0 c_0^2 ik_1 + m\omega^2 + i\omega s - r}, \\ C_4 &= C_2, \\ C_8 &= C_2 \frac{2\rho_0 c_0^2 ik_1}{2\rho_0 c_0^2 ik_1 + m\omega^2 + i\omega s - r}. \end{aligned}$$

Por tanto, se satisface

$$|\mathcal{R}| = \left| \frac{C_1}{C_2} \right| = \left| e^{2ik_1L} \frac{-m\omega^2 - i\omega s + r}{2\rho_0 c_0^2 ik_1 + m\omega^2 + i\omega s - r} \right|,$$

$$|\mathcal{T}| = \left| \frac{C_8}{C_2} \right| = \left| \frac{2\rho_0 c_0^2 ik_1}{2\rho_0 c_0^2 ik_1 + m\omega^2 + i\omega s - r} \right|.$$

- (vii) Por último, se han comparado los resultados numéricos obtenidos en el caso de incidencia oblicua con placa, considerando que la placa rígida tiene impedancia $Z = 0$, con los obtenidos a partir del programa de incidencia oblicua sin placa rígida. La impedancia mecánica de una placa rígida viene dada por (véase [10])

$$Z = s + i \left(-\omega m + \frac{r}{\omega} \right),$$

donde m , s y r son, respectivamente, la densidad superficial de masa y los coeficientes de viscosidad y elasticidad asociados al movimiento de la placa. Por tanto, para imponer $Z = 0$ basta considerar $s = 0$ y $r = m\omega^2$. Al sustituir estos valores en el sistema lineal asociado al problema de incidencia oblicua con placa (2.120) se obtiene

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(\beta_1)C_1 - \cos(\beta_p)C_3 - \cos(\beta_p)C_4 + \sin(\beta_s)C_5 + \sin(\beta_s)C_6 = -\cos(\beta_1)C_2, \\ \rho_0 c_0^2 \mathbf{k}_1 \cdot \begin{pmatrix} -\cos(\beta_1) \\ \sin(\beta_1) \end{pmatrix} C_1 + \mathbf{k}_p \cdot \begin{pmatrix} (2\mu + \lambda) \cos(\beta_p) \\ -\lambda \sin(\beta_p) \end{pmatrix} C_3 - \mathbf{k}_p \cdot \begin{pmatrix} (2\mu + \lambda) \cos(\beta_p) \\ \lambda \sin(\beta_p) \end{pmatrix} C_4 \\ -\mathbf{k}_s \cdot \begin{pmatrix} (2\mu + \lambda) \sin(\beta_s) \\ \lambda \cos(\beta_s) \end{pmatrix} C_5 + \mathbf{k}_s \cdot \begin{pmatrix} (2\mu + \lambda) \sin(\beta_s) \\ -\lambda \cos(\beta_s) \end{pmatrix} C_6 = -\rho_0 c_0^2 \mathbf{k}_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta_1) \\ \sin(\beta_1) \end{pmatrix} C_2 \\ \mu \mathbf{k}_p \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\beta_p) \\ \cos(\beta_p) \end{pmatrix} C_3 + \mu \mathbf{k}_p \cdot \begin{pmatrix} \sin(\beta_p) \\ \cos(\beta_p) \end{pmatrix} C_4 - \mu \mathbf{k}_s \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta_s) \\ \sin(\beta_s) \end{pmatrix} C_5 + \mu \mathbf{k}_s \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta_s) \\ -\sin(\beta_s) \end{pmatrix} C_6 = 0, \\ e^{-ik_{1p}L} \cos(\beta_p)C_3 + e^{ik_{1p}L} \cos(\beta_p)C_4 + e^{-ik_{1s}L} \sin(\beta_s)C_5 + e^{ik_{1s}L} \sin(\beta_s)C_6 \\ - e^{ik_{13}L} \cos(\beta_3)C_8 = 0, \\ ie^{-ik_{1p}L} \mathbf{k}_p \cdot \begin{pmatrix} -(2\mu + \lambda) \cos(\beta_p) \\ \lambda \sin(\beta_p) \end{pmatrix} C_3 + ie^{ik_{1p}L} \mathbf{k}_p \cdot \begin{pmatrix} (2\mu + \lambda) \cos(\beta_p) \\ \lambda \sin(\beta_p) \end{pmatrix} C_4 \\ + ie^{-ik_{1s}L} \mathbf{k}_s \cdot \begin{pmatrix} (2\mu + \lambda) \sin(\beta_s) \\ \lambda \cos(\beta_s) \end{pmatrix} C_5 + ie^{ik_{1s}L} \mathbf{k}_s \cdot \begin{pmatrix} -(2\mu + \lambda) \sin(\beta_s) \\ \lambda \cos(\beta_s) \end{pmatrix} C_6 \\ - e^{ik_{13}L} i \rho_0 c_0^2 \mathbf{k}_3 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta_3) \\ \sin(\beta_3) \end{pmatrix} = 0, \\ i\mu e^{-ik_{1p}L} \mathbf{k}_p \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\beta_p) \\ \cos(\beta_p) \end{pmatrix} C_3 + i\mu e^{ik_{1p}L} \mathbf{k}_p \cdot \begin{pmatrix} \sin(\beta_p) \\ \cos(\beta_p) \end{pmatrix} C_4 - i\mu e^{-ik_{1s}L} \mathbf{k}_s \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta_s) \\ \sin(\beta_s) \end{pmatrix} C_5 \\ + i\mu e^{ik_{1s}L} \mathbf{k}_s \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta_s) \\ -\sin(\beta_s) \end{pmatrix} C_6 = 0. \end{array} \right.$$

que se observa que es equivalente al sistema de incidencia oblicua sin placa (2.91).

Capítulo 3

Problema inverso

Una vez que han sido descritos los modelos matemáticos acústicos en el Capítulo 2, la segunda parte de este proyecto se ha centrado en la resolución numérica de un problema inverso. Los únicos datos conocidos de la plancha de polímeros son los proporcionados por el fabricante, que son las dimensiones de la plancha, la densidad de masa y una serie de gráficas que muestran la respuesta en frecuencia del nivel de reducción de eco, la pérdida por inserción y el coeficiente de disipación de potencia. Para obtener una caracterización acústica del material AptFlex SF5048 (véase [3]) mediante un modelo visco-elástico, se necesita conocer su coeficiente de Poisson y su módulo de Young.

3.1. Datos experimentales

La empresa *Precision Acoustics*, proveedora del material AptFlex SF5048, proporciona los valores experimentales para el nivel de reducción de eco, la pérdida por inserción y el coeficiente de disipación de potencia. Las respuestas en frecuencia de este material están disponibles en tres configuraciones experimentales diferentes, como se muestra en [3]:

- (a) El comportamiento acústico de la placa polimérica trabajando mecánicamente sin soportar cargas, en un rango de frecuencias entre 20 y 200 kHz (véase la Figura 3.1).
- (b) El comportamiento acústico de la placa en contacto con una placa de acero de 5 mm de espesor, en un rango de frecuencias entre 1 y 25 kHz (véase la Figura 3.2).
- (c) El comportamiento acústico de la placa de polímeros en contacto con una placa de acero de 5 mm de espesor, en un rango de frecuencias entre 2 y 50 kHz y para diferentes valores de presión hidrostática (véase la Figura 3.3).

Para poder utilizar los datos experimentales de las respuestas en frecuencia facilitados por el proveedor de la forma más precisa posible, éstos se han digitalizado con el programa `digitizer` de MATLAB (véase [23]), consiguiendo así los valores numéricos

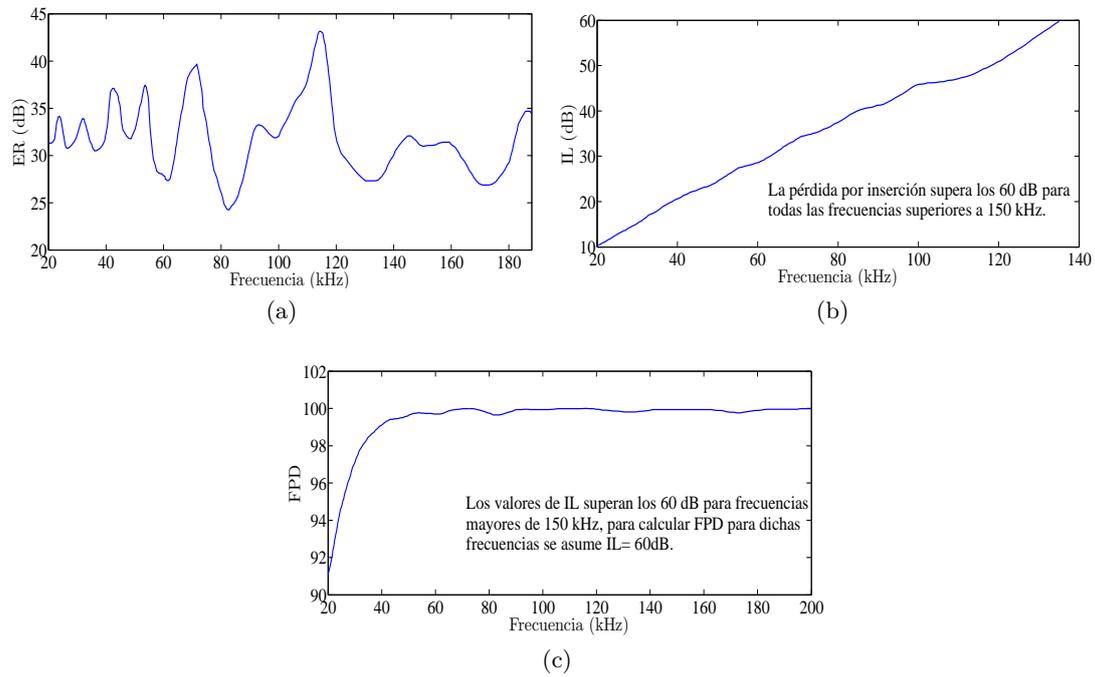


Figura 3.1: Valores experimentales de la respuesta en frecuencia de la plancha polimérica sin cargas para el nivel de reducción de eco (a), la pérdida por inserción (b) y el coeficiente de disipación de potencia (c).

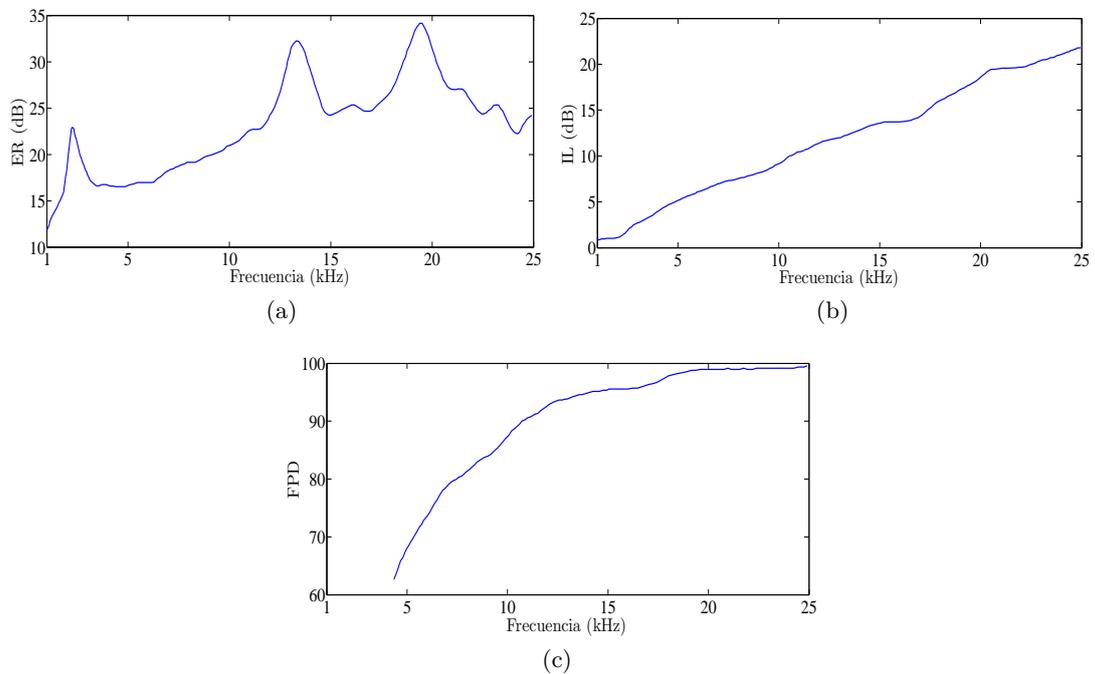


Figura 3.2: Valores experimentales de la respuesta en frecuencia de la plancha polimérica en contacto con una placa rígida de acero para el nivel de reducción de eco (a), la pérdida por inserción (b) y el coeficiente de disipación de potencia (c).

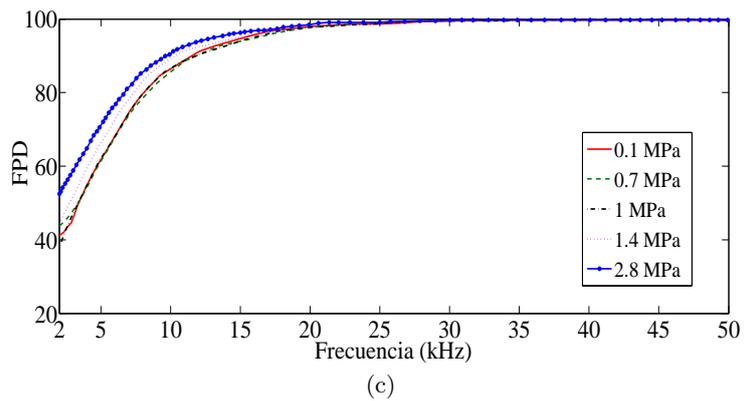
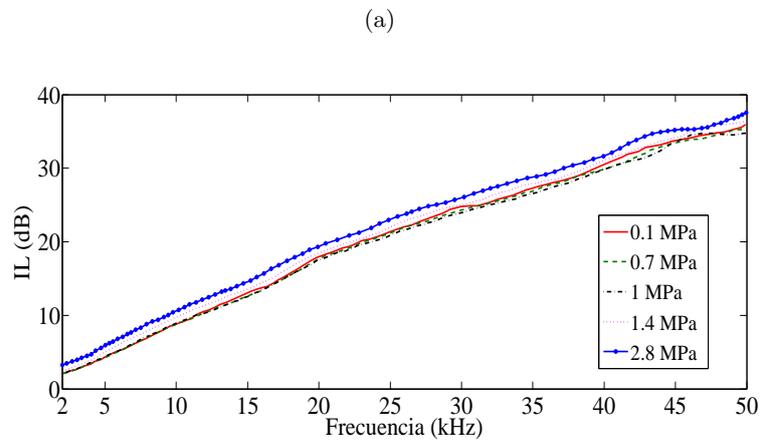
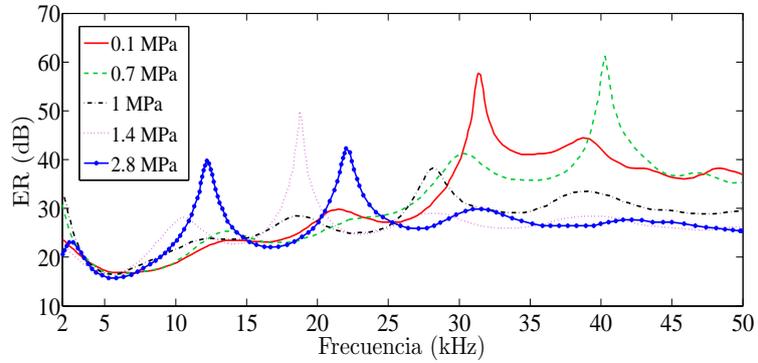


Figura 3.3: Valores experimentales de la respuesta en frecuencia de la plancha polimérica en contacto con una placa rígida de acero para el nivel de reducción de eco (arriba), la pérdida por inserción (en medio) y el coeficiente de disipación de potencia (abajo), a distintas presiones hidrostáticas.

de la respuesta en frecuencia experimental de los distintos niveles para alrededor de 200 frecuencias, que serán las frecuencias de estudio en el problema inverso.

La finalidad del problema inverso considerado es encontrar los valores de la parte real y la parte imaginaria del módulo de Young, E' y E'' , respectivamente, que proporcionen una respuesta en frecuencia lo más próxima posible a la proporcionada por las medidas experimentales. El valor del coeficiente de Poisson también es desconocido pero, durante todas las pruebas, se utilizará $\nu = 0.48$, siguiendo el trabajo [14], que es el valor genérico para los elastómeros de poliuretano. Además, siguiendo las especificaciones técnicas proporcionadas por el proveedor del material Aptflex SF5048 (véase [3]), los datos que se han utilizado para la plancha de polímeros son la densidad de masa $\rho_s = 2100 \text{ kg/m}^3$ y el espesor $L = 0.05 \text{ m}$. Por otro lado, en el modelo que contiene la placa rígida de acero los datos utilizados son la densidad de masa volúmica $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ y el espesor $l = 5 \text{ mm}$ (por tanto, su densidad superficial de masa es $m = 7850 \times 0.005 = 39.25 \text{ kg/m}^2$). Para calcular la densidad de masa del agua, se ha utilizado el estándar IAPWS-95 (véase [15]), que permite calcular la densidad de masa a partir de la temperatura y de la presión hidrostática. Además, para calcular la velocidad del sonido en el agua se ha implementado una función que sigue el algoritmo explicado en el Capítulo 2 para calcular dicha velocidad a partir de la temperatura y de la presión hidrostática (véase [6] y [11]). En todos los cálculos, se ha considerado una temperatura de $\theta = 20^\circ\text{C}$ y una presión hidrostática de $\pi_0 = 101325 \text{ Pa}$.

3.2. Ajustes del módulo de Young en la configuración sin placa

En esta sección y en las siguientes, se van a mostrar las distintas funciones objetivo que deseamos minimizar en cada una de las configuraciones, así como los resultados numéricos obtenidos. Más precisamente, en esta sección se muestran las funciones objetivo utilizadas y los resultados numéricos obtenidos en la configuración sin placa.

3.2.1. Ajuste considerando E' y E'' constantes

Se ha realizado un primer ajuste en el que se considera que la parte real y la parte imaginaria del módulo de Young, E' y E'' respectivamente, son constantes.

Nivel de reducción de eco

Se denota por ER_j^{exp} con $j = 1, \dots, N_{\text{ER}}$ a los valores experimentales obtenidos al medir el nivel de reducción de eco en la configuración sin placa (obtenidos a partir de la Figura 3.1a), donde N_{ER} es el número de frecuencias de estudio. Del mismo modo, se denota por ER_j^{anl} con $j = 1, \dots, N_{\text{ER}}$, a los valores analíticos calculados a partir de la resolución del sistema (2.70), correspondiente al problema de propagación acústica en la configuración sin placa. Se introduce, a partir del modelo, una función respuesta

$$\text{ER}_j^{\text{anl}} = \widehat{\text{ER}}(E, f_j), \quad (3.1)$$

donde $E = E' - iE''$ y f_j es la frecuencia de trabajo. Así, el problema de minimización

viene dado por

$$(E', E'') = \arg \min_{x, y > 0} \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{ER}} |\text{ER}_j^{\text{exp}} - \widehat{\text{ER}}(x - iy, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{ER}} |\text{ER}_j^{\text{exp}}|^2}}. \quad (3.2)$$

Una vez realizado el ajuste, se puede calcular el error relativo cometido en norma L_2 utilizando la siguiente expresión:

$$\mathcal{E}_{ER} = 100 \times \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{ER}} |\text{ER}_j^{\text{exp}} - \widehat{\text{ER}}(E' - iE'', f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{ER}} |\text{ER}_j^{\text{exp}}|^2}}. \quad (3.3)$$

Nivel de pérdida por inserción

Se denota por IL_j^{exp} con $j = 1, \dots, N_{IL}$ a los valores experimentales obtenidos al medir la pérdida por inserción en la configuración sin placa (obtenidos a partir de la Figura 3.1b), donde N_{IL} es el número de frecuencias de estudio. Del mismo modo, se denota por IL_j^{anl} con $j = 1, \dots, N_{IL}$, a los valores analíticos calculados al resolver el sistema (2.70), sistema asociado al problema de propagación acústica en la configuración sin placa. Se ha introducido, a partir del modelo, una función respuesta

$$\text{IL}_j^{\text{anl}} = \widehat{\text{IL}}(E, f_j), \quad (3.4)$$

donde el módulo de Young es $E = E' - iE''$ y f_j es la frecuencia de trabajo. El problema de ajuste viene descrito por

$$(E', E'') = \arg \min_{x, y > 0} \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{IL}} |\text{IL}_j^{\text{exp}} - \widehat{\text{IL}}(x - iy, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{IL}} |\text{IL}_j^{\text{exp}}|^2}}. \quad (3.5)$$

Con este ajuste realizado, se puede calcular el error relativo cometido en norma L_2 del siguiente modo:

$$\mathcal{E}_{IL} = 100 \times \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{IL}} |\text{IL}_j^{\text{exp}} - \widehat{\text{IL}}(E' - iE'', f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{IL}} |\text{IL}_j^{\text{exp}}|^2}}. \quad (3.6)$$

Coefficiente de disipación de potencia

Se denota por $\text{FPD}_j^{\text{exp}}$ con $j = 1, \dots, N_{\text{FPD}}$ a los valores experimentales obtenidos al medir el coeficiente de disipación de potencia en la configuración sin placa (obtenidos a partir de la Figura 3.1c), donde N_{FPD} es el número de frecuencias de estudio. Del mismo modo, se denota por $\text{FPD}_j^{\text{anl}}$ con $j = 1, \dots, N_{\text{FPD}}$, a los valores analíticos calculados a partir de la resolución del sistema (2.70), el cual está asociado al problema de propagación acústica en la configuración sin placa. Se introduce, a partir del modelo, una función respuesta

$$\text{FPD}_j^{\text{anl}} = \widehat{\text{FPD}}(E, f_j), \quad (3.7)$$

donde el módulo de Young es $E = E' - iE''$ y f_j es la frecuencia de trabajo. El problema de ajuste se describe por

$$(E', E'') = \arg \min_{x, y > 0} \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{FPD}}} |\text{FPD}_j^{\text{exp}} - \widehat{\text{FPD}}(x - iy, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{FPD}}} |\text{FPD}_j^{\text{exp}}|^2}}. \quad (3.8)$$

Una vez realizado el ajuste, se puede calcular el error relativo cometido en norma L_2 utilizando la siguiente expresión:

$$\mathcal{E}_{\text{FPD}} = 100 \times \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{FPD}}} |\text{FPD}_j^{\text{exp}} - \widehat{\text{FPD}}(E' - iE'', f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{FPD}}} |\text{FPD}_j^{\text{exp}}|^2}}. \quad (3.9)$$

Ajuste conjunto

Se denota por ER_j^{exp} , IL_j^{exp} y $\text{FPD}_j^{\text{exp}}$ con $j = 1, \dots, N_{\text{freq}}$ a los valores experimentales obtenidos al medir el nivel de reducción de eco, la pérdida por inserción y el coeficiente de disipación de potencia, respectivamente, en la configuración sin placa (obtenidos a partir de las tres gráficas de la Figura 3.1), donde N_{freq} es el número de frecuencias de estudio en que se calculan los niveles. Se definen ER_j^{anl} , IL_j^{anl} y $\text{FPD}_j^{\text{anl}}$ de forma idéntica a (3.1), (3.4) y (3.7), respectivamente. El problema de ajuste viene

dado en este caso por

$$(E', E'') = \arg \min_{x, y > 0} \left(\frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{freq}}} |\text{ER}_j^{\text{exp}} - \widehat{\text{ER}}(x - iy, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{freq}}} |\text{ER}_j^{\text{exp}}|^2}} + \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{freq}}} |\text{IL}_j^{\text{exp}} - \widehat{\text{IL}}(x - iy, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{freq}}} |\text{IL}_j^{\text{exp}}|^2}} + \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{freq}}} |\text{FPD}_j^{\text{exp}} - \widehat{\text{FPD}}(x - iy, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{freq}}} |\text{FPD}_j^{\text{exp}}|^2}} \right). \quad (3.10)$$

Una vez realizado el ajuste, se puede calcular el error relativo cometido en norma L_2 para cada uno de los niveles utilizando las expresiones (3.3), (3.6) y (3.9), donde $N_{\text{ER}} = N_{\text{IL}} = N_{\text{FPD}} = N_{\text{freq}}$.

Para calcular los mínimos de cada problema de minimización, se han implementado diversos programas en MATLAB que calculan el mínimo de dichas funciones objetivo, lo que nos permite mostrar los resultados numéricos obtenidos con cada uno de los ajustes.

MATLAB incluye en su Toolbox de optimización, la función `fmincon` (véase [18]) que utiliza métodos iterativos para calcular el mínimo de una función no lineal de varias variables cuando ésta está sujeta a restricciones. En los test numéricos realizados con dicha función, se ha observado que utiliza un algoritmo que posee únicamente convergencia local y por tanto, solamente es capaz de resolver los problemas de ajuste si el iterante inicial es próximo al mínimo buscado. En nuestro problema inverso, que ha sido formulado como un problema de minimización, dado que se desconocen las propiedades del material y se trabaja con un rango de valores muy amplio, la implementación de estos métodos iterativos tanto para la parte real como para la parte imaginaria del módulo de Young no siempre proporciona los resultados deseados. Como alternativa se ha implementado una nueva estrategia de optimización que, aunque más costosa computacionalmente, ya que se basa en un algoritmo de “fuerza bruta” (realiza una búsqueda exhaustiva entre los valores alcanzados por la función objetivo en un conjunto discreto de posiciones), encuentra el mínimo de una función de dos variables de forma anidada en sucesivas iteraciones. Dicha función, llamada `fminglobal`, tiene como datos de entrada: la función a minimizar, los extremos inferiores, a_m y b_m , y superiores, A_m y B_m , de los intervalos en la iteración m en los que se busca los valores de E' y E'' en los que se alcanza el mínimo y el número de puntos, n_1 y n_2 , logarítmicamente espaciados contenidos en el intervalo de la primera variable y de la segunda, respectivamente, y en los que la función objetivo será evaluada.

La función `fminglobal` genera una rejilla de puntos contenida en $[a_m, A_m] \times [b_m, B_m]$, en la iteración m , en los que se evalúa la función a minimizar, y calcula la localización

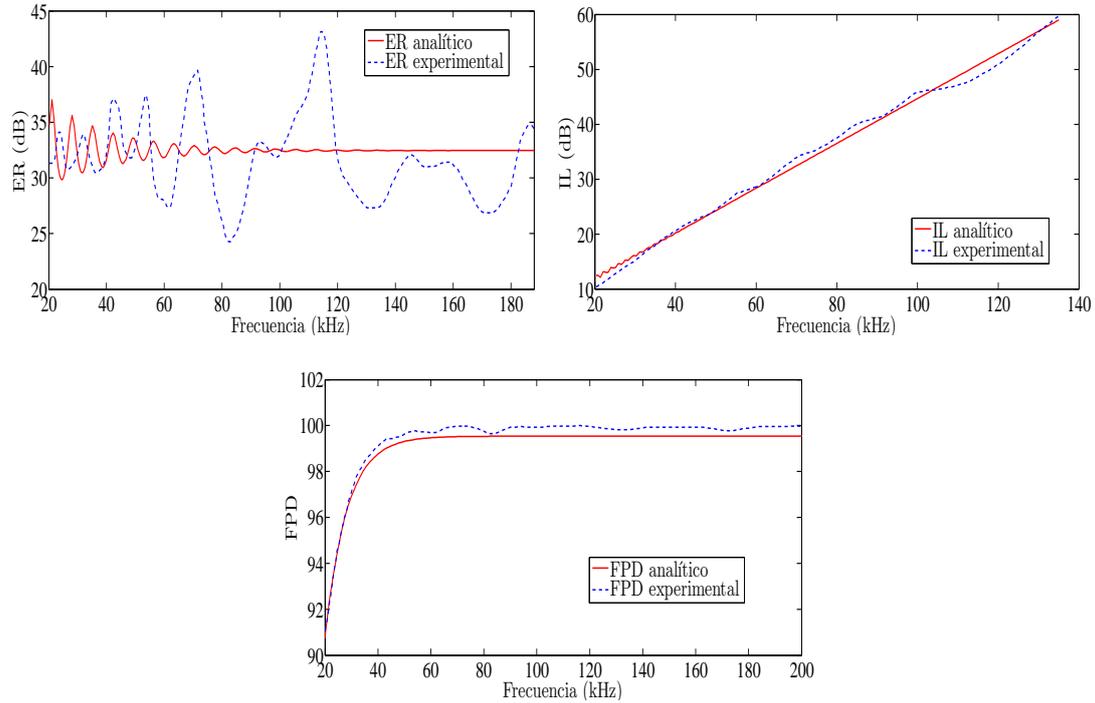


Figura 3.4: Representación gráfica con respecto a la frecuencia de los niveles ER (arriba a la izquierda), IL (arriba a la derecha) y FPD (abajo) tanto experimentales (línea azul discontinua) como los numéricos (línea roja continua) considerando las funciones objetivo (3.2), (3.5) y (3.8), en una configuración sin placa y asumiendo que el módulo de Young es complejo y constante.

del mínimo en dichos puntos.

La elección de los extremos de los intervalos en los que se busca el mínimo en ambas variables es el siguiente: primero, se parte de intervalos de búsqueda relativamente grandes, para luego localizar el mínimo de la función. Una vez hecho esto, se reduce la longitud de los intervalos de búsqueda por un factor 10^{-1} pero preservando que los nuevos intervalos contengan la localización del mínimo antes calculado. De este modo, realizando un número finito N de iteraciones, se obtiene una sucesión de conjuntos encajados en los que se encuentra el mínimo de la función de interés. Esta estrategia de minimización permite localizar el mínimo global buscado con una tolerancia prescrita.

Los resultados del ajuste para el modelo sin placa rígida, utilizando la función `fminglobal`, y trabajando con frecuencias entre 20 y 200 kHz son los mostrados en la Figura 3.4 para los ajustes individuales, utilizando las funciones objetivo (3.2), (3.5) y (3.8), y en la Figura 3.5 para el ajuste conjunto, siguiendo la función objetivo (3.10). Los valores tanto de la parte real como de la imaginaria del módulo de Young, calculados como se indica en (3.2), (3.5) y (3.8) para los ajustes individuales y, en (3.10), para el ajuste conjunto así como el error relativo cometido en cada ajuste, calculado como se indica en (3.3), (3.6) y (3.9), tanto para los ajustes individuales como para el ajuste conjunto, se muestran en la Tabla 3.1.

El error cometido en el ajuste de ER individual es aproximadamente del 12% y

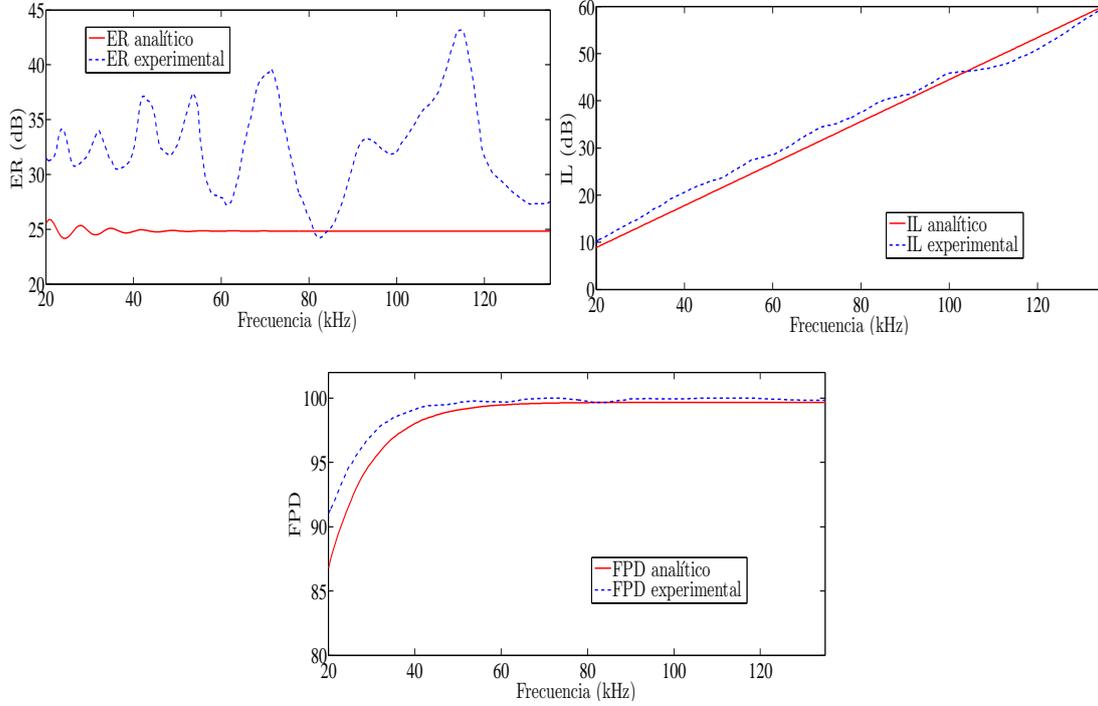


Figura 3.5: Representación gráfica con respecto a la frecuencia de los niveles ER (arriba a la izquierda), IL (arriba a la derecha) y FPD (abajo) tanto experimentales (línea azul discontinua) como numéricos (línea roja continua) considerando la función objetivo mostrada en (3.10) en una configuración sin placa y asumiendo que el módulo de Young es complejo y constante.

| | ER | IL | FPD | Conjunto |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| E' [Pa] | 1.177×10^8 | 7.565×10^6 | 1.123×10^8 | 1.123×10^8 |
| E'' [Pa] | 1.123×10^7 | 4.037×10^5 | 3.126×10^7 | 2.595×10^7 |
| \mathcal{E}_{ER} | 12.34 % | 86.25 % | 93.48 % | 26.34 % |
| \mathcal{E}_{IL} | 100.25 % | 2.83 % | 100.45 % | 5.34 % |
| \mathcal{E}_{FPD} | 13.57 % | 35.77 % | 0.33 % | 1.07 % |

Tabla 3.1: Parte real y parte imaginaria del módulo de Young y errores cometidos en el ajuste de los datos experimentales en la configuración sin placa asumiendo módulo de Young constante tanto en los ajustes individuales como en el ajuste conjunto.

en el ajuste conjunto es aproximadamente del 26 %. Por este motivo, se ha tratado de mejorar el ajuste realizando otra suposición sobre la parte real e imaginaria del módulo de Young.

3.2.2. Ajuste considerando el módulo de Young como función lineal de la frecuencia

Con el objetivo de mejorar los resultados obtenidos al suponer que tanto la parte real como la imaginaria del módulo de Young son constantes, en lo que sigue se ha considerado que la parte imaginaria del módulo de Young es una función lineal de la frecuencia. Más precisamente, siguiendo el modelo propuesto en [20], se ha considerado que el módulo de Young de la plancha de polímeros se puede escribir como

$$E = E' - i\omega E'',$$

donde E' y E'' continúan siendo asumidas constantes.

Nivel de reducción de eco

Se denota por ER_j^{exp} con $j = 1, \dots, N_{\text{ER}}$ a los valores experimentales obtenidos al medir el nivel de reducción de eco en la configuración sin placa (obtenidos a partir de la Figura 3.1a), donde N_{ER} es el número de frecuencias de estudio. Del mismo modo, se denota por ER_j^{anl} con $j = 1, \dots, N_{\text{ER}}$, a los valores analíticos calculados a partir de la solución del sistema (2.70). Se introduce, a partir del modelo, una función respuesta

$$\text{ER}_j^{\text{anl}} = \widehat{\text{ER}}(E, f_j), \quad (3.11)$$

donde $E = E' - i2\pi f_j E''$ y f_j es la frecuencia de trabajo. El problema de ajuste viene dado por

$$(E', E'') = \arg \min_{x, y > 0} \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{ER}}} |\text{ER}_j^{\text{exp}} - \widehat{\text{ER}}(x - i2\pi f_j y, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{ER}}} |\text{ER}_j^{\text{exp}}|^2}}. \quad (3.12)$$

Una vez realizado el ajuste, se puede calcular el error relativo cometido en norma L_2 utilizando la siguiente expresión:

$$\mathcal{E}_{\text{ER}} = 100 \times \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{ER}}} |\text{ER}_j^{\text{exp}} - \widehat{\text{ER}}(E' - i2\pi f_j E'', f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{ER}}} |\text{ER}_j^{\text{exp}}|^2}}. \quad (3.13)$$

Nivel de pérdida por inserción

Se denota por IL_j^{exp} con $j = 1, \dots, N_{\text{IL}}$ a los valores experimentales obtenidos al medir la pérdida por inserción en la configuración sin placa (obtenidos a partir de la

Figura 3.1b), donde N_{IL} es el número de frecuencias de estudio. Del mismo modo, se denota por IL_j^{anl} con $j = 1, \dots, N_{\text{IL}}$, a los valores analíticos calculados a partir de la solución del sistema (2.70). Se introduce, a partir del modelo, una función respuesta

$$\text{IL}_j^{\text{anl}} = \widehat{\text{IL}}(E, f_j), \quad (3.14)$$

donde el módulo de Young es $E = E' - i2\pi f_j E''$ y f_j es la frecuencia de trabajo. El problema de minimización viene dado por

$$(E', E'') = \arg \min_{x, y > 0} \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{IL}}} |\text{IL}_j^{\text{exp}} - \widehat{\text{IL}}(x - i2\pi f_j y, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{IL}}} |\text{IL}_j^{\text{exp}}|^2}}. \quad (3.15)$$

Con este ajuste realizado, el error relativo cometido en norma L_2 es

$$\mathcal{E}_{\text{IL}} = 100 \times \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{IL}}} |\text{IL}_j^{\text{exp}} - \widehat{\text{IL}}(E' - i2\pi f_j E'', f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{IL}}} |\text{IL}_j^{\text{exp}}|^2}}. \quad (3.16)$$

Coefficiente de disipación de potencia

Se denota por $\text{FPD}_j^{\text{exp}}$ con $j = 1, \dots, N_{\text{FPD}}$ a los valores experimentales obtenidos al medir el coeficiente de disipación de potencia en la configuración sin placa (obtenidos a partir de la Figura 3.1c), donde N_{FPD} es el número de frecuencias de estudio. Del mismo modo, se denota por $\text{FPD}_j^{\text{anl}}$ con $j = 1, \dots, N_{\text{FPD}}$, a los valores analíticos calculados a partir de la solución del sistema (2.70). Se introduce, a partir del modelo, una función respuesta

$$\text{FPD}_j^{\text{anl}} = \widehat{\text{FPD}}(E, f_j), \quad (3.17)$$

donde el módulo de Young es $E = E' - i2\pi f_j E''$ y f_j es la frecuencia de trabajo. El problema de ajuste viene descrito por

$$(E', E'') = \arg \min_{x, y > 0} \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{FPD}}} |\text{FPD}_j^{\text{exp}} - \widehat{\text{FPD}}(x - i2\pi f_j y, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{FPD}}} |\text{FPD}_j^{\text{exp}}|^2}}. \quad (3.18)$$

El error relativo cometido en norma L_2 es

$$\mathcal{E}_{\text{FPD}} = 100 \times \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{FPD}}} |\text{FPD}_j^{\text{exp}} - \widehat{\text{FPD}}(E' - i2\pi f_j E'', f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{FPD}}} |\text{FPD}_j^{\text{exp}}|^2}}. \quad (3.19)$$

Ajuste conjunto

Se denota por ER_j^{exp} , IL_j^{exp} y FPD_j^{exp} con $j = 1, \dots, N_{\text{freq}}$ a los valores experimentales obtenidos al medir el nivel de reducción de eco, la pérdida por inserción y el coeficiente de disipación de potencia, respectivamente, en la configuración sin placa (obtenidos a partir de las tres gráficas de la Figura 3.1), donde N_{freq} es el número de frecuencias de estudio en que se calculan los niveles. Se definen ER_j^{anl} , IL_j^{anl} y FPD_j^{anl} , como en (3.11), (3.14) y (3.17), respectivamente. El problema de ajuste está descrito por

$$(E', E'') = \arg \min_{x, y > 0} \left(\frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{freq}}} |ER_j^{\text{exp}} - \widehat{ER}(x - i2\pi f_j y, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{freq}}} |ER_j^{\text{exp}}|^2}} + \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{freq}}} |IL_j^{\text{exp}} - \widehat{IL}(x - i2\pi f_j y, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{freq}}} |IL_j^{\text{exp}}|^2}} + \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{freq}}} |FPD_j^{\text{exp}} - \widehat{FPD}(x - i2\pi f_j y, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{freq}}} |FPD_j^{\text{exp}}|^2}} \right). \quad (3.20)$$

Una vez realizado el ajuste, se puede calcular el error relativo cometido en norma L_2 , para cada uno de los niveles utilizando las expresiones (3.13), (3.16) y (3.19) con $N_{ER} = N_{IL} = N_{FPD} = N_{\text{freq}}$.

Los resultados del ajuste para el modelo sin placa rígida trabajando con frecuencias entre 20 y 200 kHz, utilizando la función `fminglobal` (descrita en la Sección 3.2.1) son los mostrados en la Figura 3.6 para los ajustes individuales (véanse las funciones objetivo (3.12), (3.15) y (3.18)) y en la Figura 3.7 para el ajuste conjunto (véase la función objetivo (3.20)).

En la Tabla 3.2 se muestran los valores tanto de la parte real como de la imaginaria del módulo de Young, calculados como se indica en (3.12), (3.15) y (3.18) para los ajustes individuales y, en (3.20), para el ajuste conjunto así como el error relativo cometido en cada ajuste en norma L_2 , calculado como se indica en (3.13), (3.16) y (3.19), tanto para los ajustes individuales como para el ajuste conjunto.

Como se observa en la Tabla 3.2 los cambios en los errores de los ajustes individuales de ER, IL y FPD no son significativos (véase resultados en la Tabla 3.1). Sin embargo, al comparar los resultados obtenidos con módulo de Young constante con los obtenidos considerando el módulo de Young como función lineal de la frecuencia, a pesar de que el error cometido en ER en el ajuste conjunto disminuye de 26 % a 16 %, tanto el error cometido en IL como el de FPD aumentan (de aproximadamente 5 % a 40 % en el caso de IL y de aproximadamente 1 % a 21 % en el caso de FPD). Es por ello que este ajuste no mejora cualitativamente los resultados del ajuste anterior.

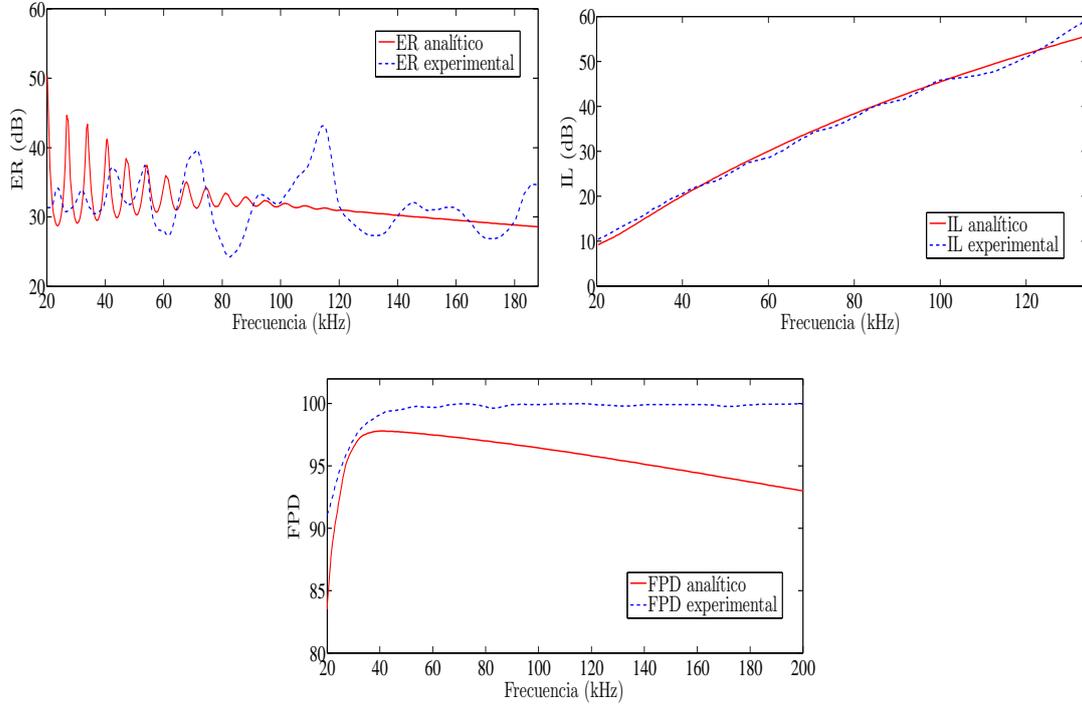


Figura 3.6: Representación gráfica con respecto a la frecuencia de los niveles ER (arriba a la izquierda), IL (arriba a la derecha) y FPD (abajo) tanto experimentales (línea azul discontinua) como numéricos (línea roja continua) considerando las funciones objetivo (3.12), (3.15) y (3.18), en una configuración sin placa, asumiendo que la parte imaginaria del módulo de Young es una función lineal de la frecuencia.

| | ER | IL | FPD | Conjunto |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| E' [Pa] | 1.097×10^8 | 1.204×10^9 | 6.893×10^7 | 1.123×10^8 |
| E'' [Pa] | 1.233×10^1 | 5.722×10^3 | 9.112×10^1 | 3.944×10^1 |
| \mathcal{E}_{ER} | 14.63 % | 90.02 % | 93.29 % | 16.20 % |
| \mathcal{E}_{IL} | 100.35 % | 3.14 % | 101.52 % | 39.71 % |
| \mathcal{E}_{FPD} | 38.10 % | 49.92 % | 4.07 % | 21.38 % |

Tabla 3.2: Parte real e imaginaria del módulo de Young y errores cometidos en el ajuste de los datos experimentales en la configuración sin placa asumiendo que el módulo de Young es una función lineal de la frecuencia tanto en los ajustes individuales como en el ajuste conjunto.

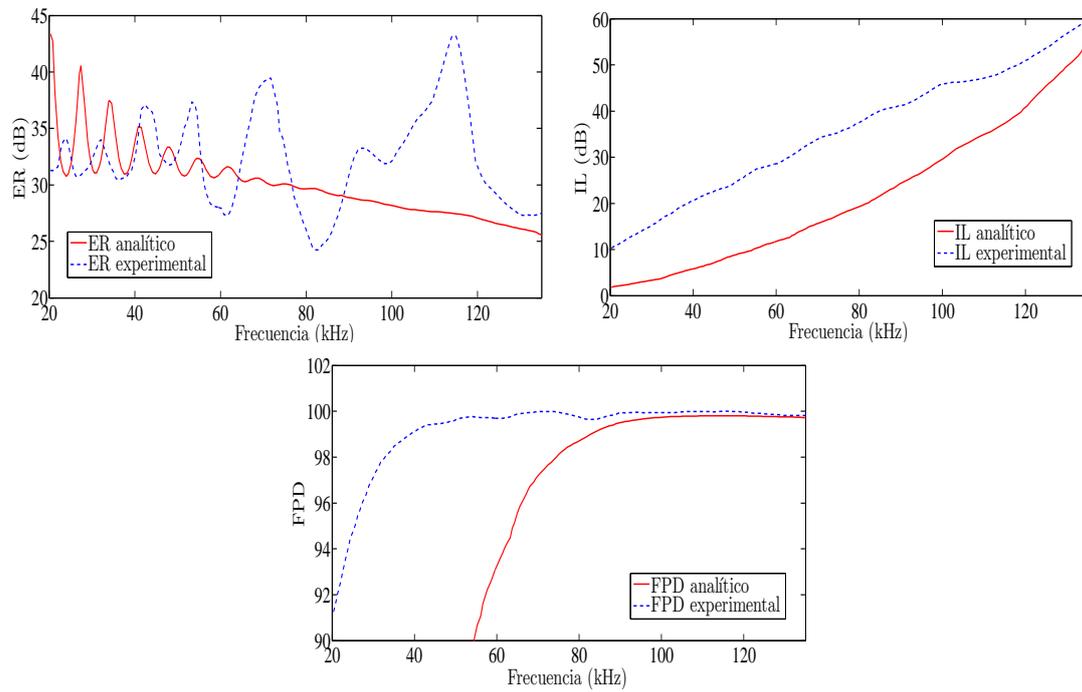


Figura 3.7: Representación gráfica con respecto a la frecuencia de los niveles ER (arriba a la izquierda), IL (arriba a la derecha) y FPD (abajo) tanto experimentales (línea azul discontinua) como numéricos (línea roja continua) considerando la función objetivo mostrada en (3.20) en una configuración sin placa, asumiendo que la parte imaginaria del módulo de Young es una función lineal de la frecuencia.

3.2.3. Ajuste considerando el módulo de Young gobernado por una función arbitraria que depende de la frecuencia

A la vista de los resultados obtenidos con los modelos más simples, se ha supuesto que el módulo de Young está gobernado por una función arbitraria que depende de la frecuencia angular, es decir, en el proceso de ajuste se buscan $\hat{E}'(\omega)$ y $\hat{E}''(\omega)$ tal y como se indica a continuación.

Nivel de reducción de eco

Se denota por ER_j^{exp} con $j = 1, \dots, N_{\text{ER}}$ a los valores experimentales obtenidos al medir la reducción de eco en la configuración sin placa (obtenidos a partir de la Figura 3.1a), donde N_{ER} es el número de frecuencias de estudio. Del mismo modo, se denota por ER_j^{anl} con $j = 1, \dots, N_{\text{ER}}$, a los valores analíticos calculados a partir de la solución del sistema (2.70). Se introduce, a partir del modelo, una función respuesta

$$ER_j^{\text{anl}} = \widehat{ER}(E_j, f_j), \quad (3.21)$$

donde $E_j = E'_j - iE''_j = \hat{E}'(2\pi f_j) - i\hat{E}''(2\pi f_j)$ y f_j es la frecuencia de trabajo. El problema de ajuste está descrito por

$$(E'_j, E''_j) = \arg \min_{x, y > 0} \frac{|ER_j^{\text{exp}} - \widehat{ER}(x - iy, f_j)|}{|ER_j^{\text{exp}}|}, \quad (3.22)$$

para cada $j = 1, \dots, N_{\text{ER}}$. Una vez realizado el ajuste, el error relativo cometido en norma L_2 , se calcula utilizando la siguiente expresión:

$$\mathcal{E}_{\text{ER}} = 100 \times \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{ER}}} |ER_j^{\text{exp}} - \widehat{ER}(E'_j - iE''_j, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{ER}}} |ER_j^{\text{exp}}|^2}}. \quad (3.23)$$

Nivel de pérdida por inserción

Se denota por IL_j^{exp} con $j = 1, \dots, N_{\text{IL}}$ a los valores experimentales obtenidos al medir la pérdida por inserción en la configuración sin placa (obtenidos a partir de la Figura 3.1b), donde N_{IL} es el número de frecuencias de estudio. Del mismo modo, se denota por IL_j^{anl} con $j = 1, \dots, N_{\text{IL}}$, a los valores analíticos calculados a partir de la solución del sistema (2.70). Se introduce, a partir del modelo, una función respuesta

$$IL_j^{\text{anl}} = \widehat{IL}(E_j, f_j), \quad (3.24)$$

donde el módulo de Young es $E_j = E'_j - iE''_j = \hat{E}'(2\pi f_j) - i\hat{E}''(2\pi f_j)$ y f_j es la frecuencia de trabajo. El problema de minimización viene dado por

$$(E'_j, E''_j) = \arg \min_{x, y > 0} \frac{|IL_j^{\text{exp}} - \widehat{IL}(x - iy, f_j)|}{|IL_j^{\text{exp}}|}, \quad (3.25)$$

para cada $j = 1, \dots, N_{\text{IL}}$. Una vez realizado el ajuste, se puede calcular el error relativo cometido en norma L_2 utilizando la siguiente expresión:

$$\mathcal{E}_{\text{IL}} = 100 \times \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{IL}}} |\text{IL}_j^{\text{exp}} - \widehat{\text{IL}}(E'_j - iE''_j, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{IL}}} |\text{IL}_j^{\text{exp}}|^2}}. \quad (3.26)$$

Coefficiente de disipación de potencia

Se denota por $\text{FPD}_j^{\text{exp}}$ con $j = 1, \dots, N_{\text{FPD}}$ a los valores experimentales obtenidos al medir el coeficiente de disipación de potencia en la configuración sin placa (obtenidos a partir de la Figura 3.1c), donde N_{FPD} es el número de frecuencias de estudio. Del mismo modo, se denota por $\text{FPD}_j^{\text{anl}}$ con $j = 1, \dots, N_{\text{FPD}}$, a los valores analíticos calculados a partir de la solución del sistema (2.70). Se introduce, a partir del modelo, una función respuesta

$$\text{FPD}_j^{\text{anl}} = \widehat{\text{FPD}}(E_j, f_j), \quad (3.27)$$

donde el módulo de Young es $E_j = E'_j - iE''_j = \hat{E}'(2\pi f_j) - i\hat{E}''(2\pi f_j)$ y f_j es la frecuencia de trabajo. El problema de ajuste viene dado por

$$(E'_j, E''_j) = \arg \min_{x, y > 0} \frac{|\text{FPD}_j^{\text{exp}} - \widehat{\text{FPD}}(x - iy, f_j)|}{|\text{FPD}_j^{\text{exp}}|}, \quad (3.28)$$

para cada $j = 1, \dots, N_{\text{FPD}}$. El error relativo cometido en el ajuste es

$$\mathcal{E}_{\text{FPD}} = 100 \times \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{FPD}}} |\text{FPD}_j^{\text{exp}} - \widehat{\text{FPD}}(E'_j - iE''_j, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{FPD}}} |\text{FPD}_j^{\text{exp}}|^2}}. \quad (3.29)$$

Ajuste conjunto.

Se denota por ER_j^{exp} , IL_j^{exp} y $\text{FPD}_j^{\text{exp}}$ con $j = 1, \dots, N_{\text{freq}}$ a los valores experimentales obtenidos al medir el nivel de reducción de eco, la pérdida por inserción y el coeficiente de disipación de potencia, respectivamente, en la configuración sin placa (obtenidos a partir de las tres gráficas de la Figura 3.1), donde N_{freq} es el número de frecuencias de estudio en que se calculan los niveles. Se definen ER_j^{anl} , IL_j^{anl} y $\text{FPD}_j^{\text{anl}}$ como en las expresiones (3.21), (3.24) y (3.27), respectivamente. El problema de ajuste se describe por

$$(E'_j, E''_j) = \arg \min_{x, y > 0} \left(\frac{|\text{ER}_j^{\text{exp}} - \widehat{\text{ER}}(x - iy, f_j)|}{|\text{ER}_j^{\text{exp}}|} + \frac{|\text{IL}_j^{\text{exp}} - \widehat{\text{IL}}(x - iy, f_j)|}{|\text{IL}_j^{\text{exp}}|} + \frac{|\text{FPD}_j^{\text{exp}} - \widehat{\text{FPD}}(x - iy, f_j)|}{|\text{FPD}_j^{\text{exp}}|} \right), \quad (3.30)$$

| Errores | Ajuste ER | Ajuste IL | Ajuste FPD | Ajuste Conjunto |
|---------------------|-----------|-----------|------------|-----------------|
| \mathcal{E}_{ER} | 0.23 % | 64.85 % | 96.26 % | 27.57 % |
| \mathcal{E}_{IL} | 100.06 % | 0.019 % | 100.18 % | 0.35 % |
| \mathcal{E}_{FPD} | 65.20 % | 18.55 % | 0.15 % | 0.35 % |

Tabla 3.3: Errores relativos del ajuste de los datos experimentales en la configuración sin placa, asumiendo que el módulo de Young depende de la frecuencia.

para cada $j = 1, \dots, N_{\text{freq}}$. Una vez realizado el ajuste, se puede calcular el error relativo cometido en norma L_2 , para cada uno de los niveles utilizando las expresiones (3.23), (3.26) y (3.29), donde $N_{ER} = N_{IL} = N_{FPD} = N_{\text{freq}}$.

Los resultados numéricos obtenidos para el modelo sin placa rígida trabajando con frecuencias entre 20 y 200 kHz se muestran en la Figura 3.8 para el ajuste individual y en la Figura 3.9 para el ajuste conjunto. En la Tabla 3.3 se muestran los errores relativos cometidos en cada uno de los ajustes realizados frecuencia a frecuencia, calculados como se indica en (3.23), (3.26) y (3.29), tanto para los ajustes individuales como para el ajuste conjunto.

En la Figura 3.8, en la gráfica del ajuste individual de FPD se aprecia que a frecuencias bajas la parte real del módulo de Young es inferior a la parte imaginaria. Este hecho no es habitual ya que la parte imaginaria suele ser aproximadamente un orden de magnitud menor que la parte real (véase [14]).

Además, a pesar de que los errores cometidos en los ajustes independientes son pequeños (todos por debajo de 0.2%) y los errores cometidos en el ajuste conjunto tanto para IL como para FPD también son pequeños (ambos son aproximadamente 0.3%), el error al ajustar el nivel ER es de aproximadamente el 30%, lo cuál nos lleva a descartar su uso y considerar solamente IL y FPD para realizar el ajuste en la configuración sin placa rígida. A continuación se describe este nuevo ajuste.

Se denota por IL_j^{exp} y FPD_j^{exp} con $j = 1, \dots, N_{\text{freq}}$ a los valores experimentales obtenidos al medir la pérdida por inserción y el coeficiente de disipación de potencia, respectivamente, en la configuración sin placa (obtenidos a partir de las gráficas de la Figura 3.1), donde N_{freq} es el número de frecuencias de estudio en que se calculan los niveles. Se definen IL_j^{anl} y FPD_j^{anl} por (3.24) y (3.27), respectivamente. El problema de minimización viene dado por

$$(E'_j, E''_j) = \arg \min_{x, y > 0} \left(\frac{|IL_j^{\text{exp}} - \widehat{IL}(x - iy, f_j)|}{|IL_j^{\text{exp}}|} + \frac{|FPD_j^{\text{exp}} - \widehat{FPD}(x - iy, f_j)|}{|FPD_j^{\text{exp}}|} \right), \quad (3.31)$$

para cada $j = 1, \dots, N_{\text{freq}}$. Una vez realizado el ajuste, se puede calcular el error relativo cometido en norma L_2 tanto para la pérdida por inserción como para el coeficiente de disipación de potencia, utilizando las expresiones (3.26) y (3.29).

El ajuste considerando IL y FPD se muestra en la Figura 3.10

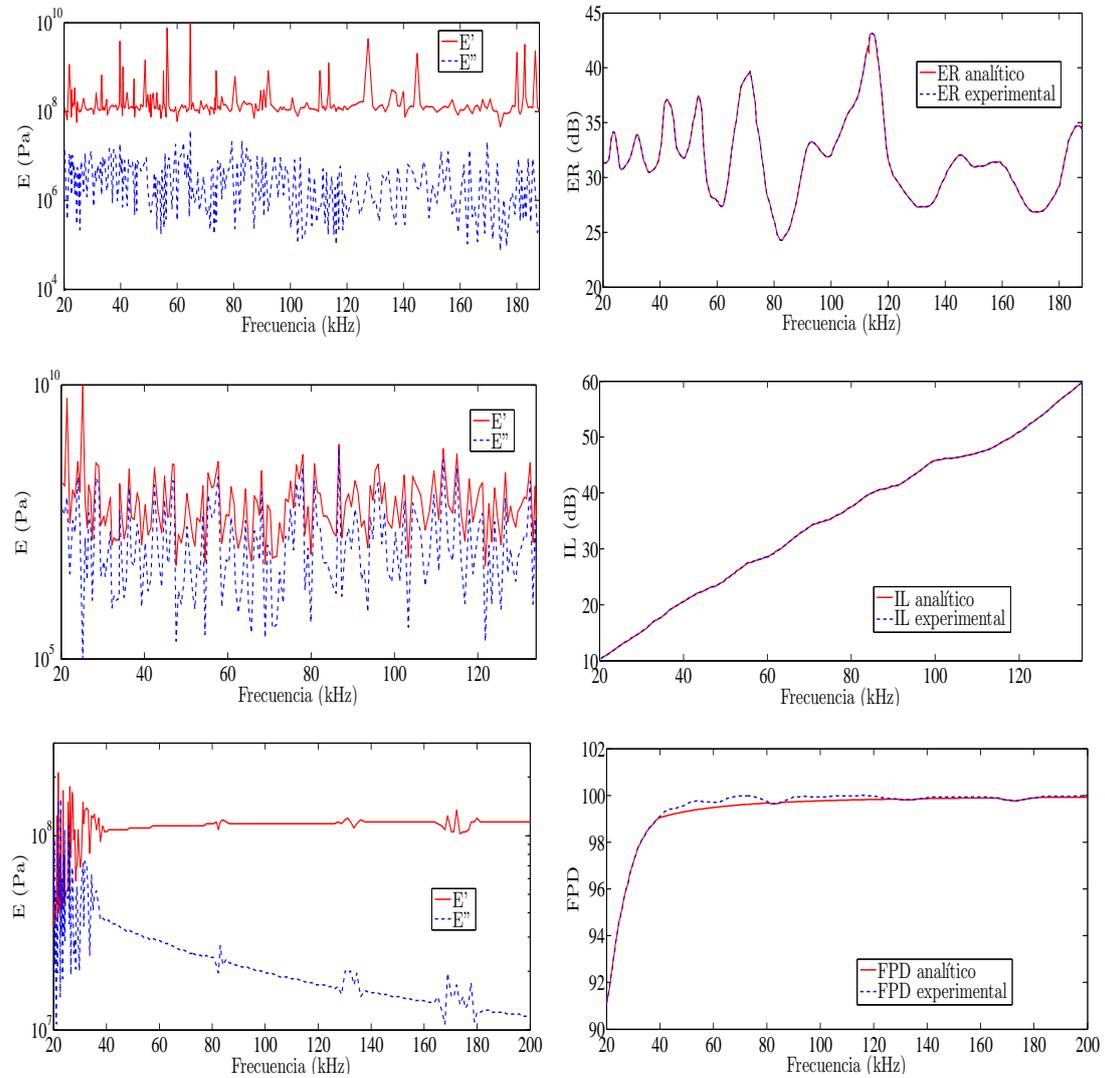


Figura 3.8: Representación gráfica con respecto a la frecuencia de los niveles ER (arriba derecha), IL (en medio derecha) y FPD (abajo derecha) tanto experimentales (línea azul discontinua) como numéricos (línea roja continua) utilizando las funciones objetivo (3.22), (3.25) y (3.28), en una configuración sin placa, asumiendo que el módulo de Young está gobernado por una función arbitraria que depende de la frecuencia (gráficas de la izquierda).

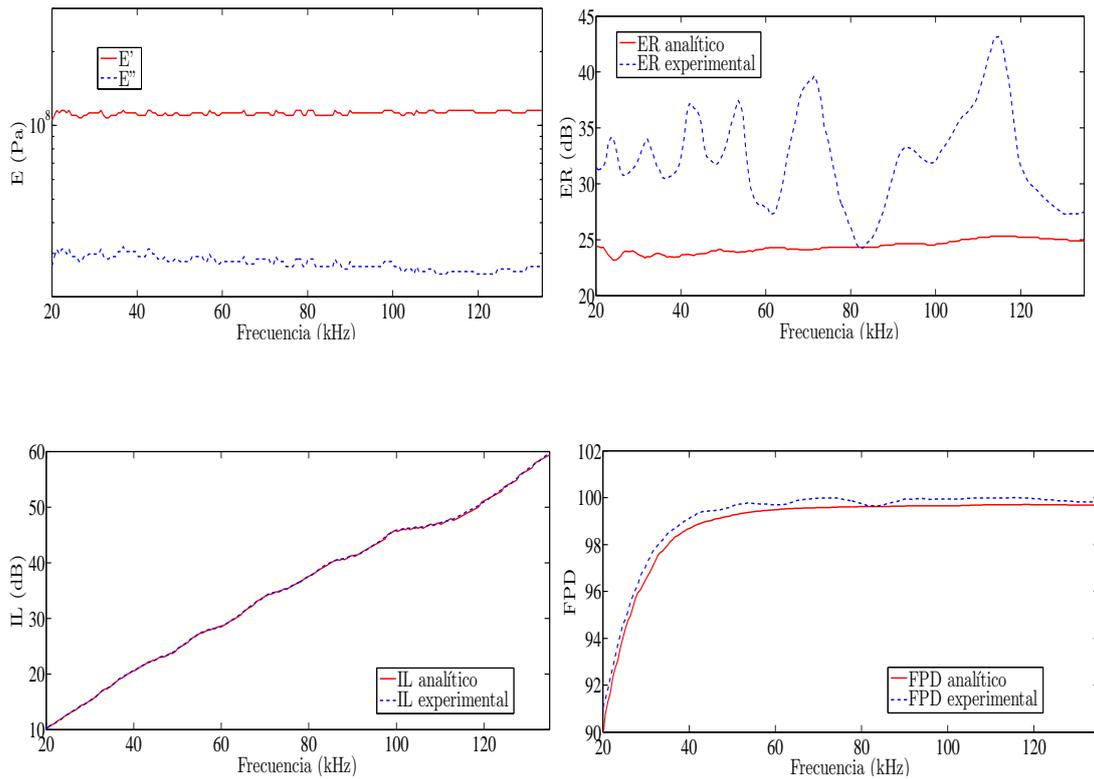


Figura 3.9: Representación gráfica con respecto a la frecuencia de los niveles ER (arriba a la derecha), IL (abajo a la izquierda) y FPD (abajo a la derecha) tanto experimentales (línea azul discontinua) como numéricos (línea roja continua) utilizando la función objetivo mostrada en (3.30) en una configuración sin placa, asumiendo que el módulo de Young está gobernado por una función arbitraria que depende de la frecuencia (arriba a la izquierda).

| Errores | Ajuste con ER | Ajuste sin ER |
|---------------------|---------------|---------------|
| \mathcal{E}_{ER} | 27.57 % | 29.11 % |
| \mathcal{E}_{IL} | 0.35 % | 0.059 % |
| \mathcal{E}_{FPD} | 0.35 % | 0.39 % |

Tabla 3.4: Errores relativos del ajuste de los datos experimentales en el ajuste conjunto con ER y el ajuste sin ER en la configuración sin placa asumiendo que el módulo de Young está gobernado por una función arbitraria que depende de la frecuencia.

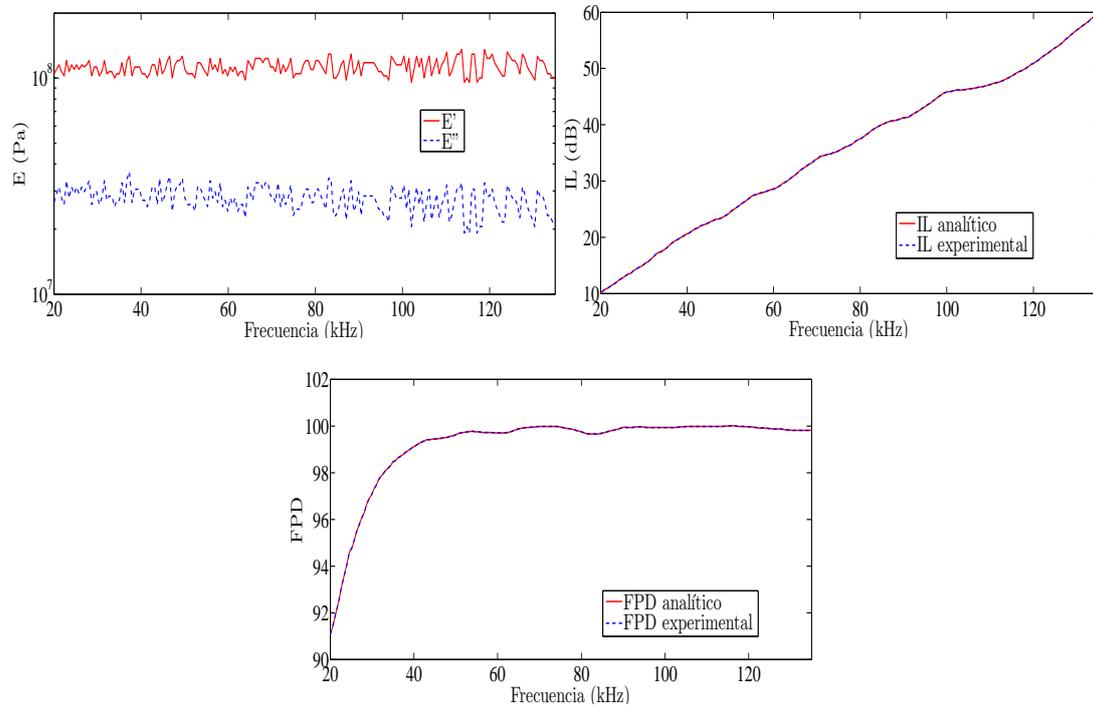


Figura 3.10: Representación gráfica con respecto a la frecuencia de los niveles IL (arriba a la derecha) y FPD (abajo) tanto experimentales (línea azul discontinua) como numéricos (línea roja continua) considerando la función objetivo mostrada en (3.31) en una configuración sin placa, asumiendo que el módulo de Young está gobernado por una función arbitraria que depende de la frecuencia (arriba a la izquierda).

Como se puede observar en la Tabla 3.4 aunque no se consideren los datos del nivel ER en el proceso de ajuste, los errores cometidos al utilizar los datos experimentales de los niveles IL y FPD son similares a los obtenidos en el ajuste conjunto de ER, IL y FPD.

A pesar de que los errores cometidos en todos los ajustes realizados en esta sección son pequeños (sin tener en cuenta los problemas que surgen al ajustar los datos experimentales del nivel ER), se observa que la respuesta en frecuencia tanto de la parte

real como de la parte imaginaria del módulo de Young presentan muchas oscilaciones. Es por esto, que se va a realizar otro ajuste para tratar de conseguir respuestas en frecuencia más suaves.

3.2.4. Ajuste con información de gradiente y hessiano

A medida que se han realizado los distintos ajustes en los cuáles las incógnitas eran la parte real y la parte imaginaria del módulo de Young, se ha observado que ligeros cambios en los iterantes iniciales del algoritmo de optimización utilizados al realizar el ajuste producen resultados muy diferentes. Para mitigar esta situación, vamos a reescribir el sistema (2.70) para tratar de realizar un ajuste más preciso que los realizados anteriormente. El sistema lineal (2.70) que se resuelve en el problema de incidencia normal es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -\rho_0 c_0^2 k_1 & (2\mu + \lambda)k_p & -(2\mu + \lambda)k_p & 0 \\ 0 & e^{-ik_p L} & e^{ik_p L} & -e^{ik_1 L} \\ 0 & -(2\mu + \lambda)k_p e^{-ik_p L} & (2\mu + \lambda)k_p e^{ik_p L} & -\rho_0 c_0^2 k_1 e^{ik_1 L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_2 \\ -\rho_0 c_0^2 k_1 C_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde $k_1 = \frac{\omega}{c_0}$ siendo c_0 la velocidad de propagación de las ondas planas en el fluido

y $k_p = \frac{\omega}{c_p}$ siendo $c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_s}}$, la velocidad de propagación de las ondas planas en el sólido visco-elástico. Si introducimos las impedancias características $Z_1 = \rho_0 c_0$, $Z_2 = \rho_s c_s$, el sistema lineal resultante se puede reescribir como

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -\frac{Z_1}{Z_2} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & e^{-ik_p L} & e^{ik_p L} & -e^{ik_1 L} \\ 0 & -e^{-ik_p L} & e^{ik_p L} & -\frac{Z_1}{Z_2} e^{ik_1 L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_2 \\ -\frac{Z_1}{Z_2} C_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si se observa este sistema en detalle se puede apreciar que los términos exponenciales que dependen de módulo de Young se pueden reescribir en términos de $\text{Re}(k_p)L$ y $e^{\text{Im}(k_p)L}$. Por ello, se ha realizado un nuevo ajuste donde las incógnitas son $\delta = \text{Re}(k_p)L$ y $M = e^{\text{Im}(k_p)L}$ y no E' y E'' .

Así, se ha considerado este sistema, que resuelve el problema de propagación acústica en la configuración sin placa (2.70). A continuación, se ha reescrito dicho sistema para dejarlo en función de δ y M . Basta tener en cuenta que $Z_1 = \rho_0 c_0$ y $Z_2 = \rho_s c_s = \rho_s \frac{\omega}{k_p}$

$= \frac{\rho_s \omega L}{\delta + i \log M}$ y el sistema (2.70) se reescribe como

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -Z_1 \omega & (2\mu + \lambda)k_p & -(2\mu + \lambda)k_p & 0 \\ 0 & e^{-i\delta} M & \frac{e^{i\delta}}{M} & -e^{ik_1 L} \\ 0 & -(2\mu + \lambda)k_p e^{-i\delta} M & (2\mu + \lambda)k_p \frac{e^{i\delta}}{M} & -Z_1 \omega e^{ik_1 L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_2 \\ -Z_1 \omega C_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dividiendo tanto la segunda fila como la cuarta por ωZ_2 y reemplazando Z_2 por su expresión en términos de δ y M , se obtiene el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -\frac{Z_1(\delta+i \log M)}{\rho_s \omega L} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & e^{-i\delta} M & \frac{e^{i\delta}}{M} & -e^{ik_1 L} \\ 0 & -e^{-i\delta} M & \frac{e^{i\delta}}{M} & -\frac{Z_1(\delta+i \log M)}{\rho_s \omega L} e^{ik_1 L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_2 \\ -\frac{Z_1(\delta+i \log M)}{\rho_s \omega L} C_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

A continuación se detallan las funciones objetivo de este nuevo ajuste.

Nivel de reducción de eco

Se denota por ER_j^{exp} con $j = 1, \dots, N_{\text{ER}}$ a los valores experimentales obtenidos al medir la reducción de eco en la configuración sin placa (obtenidos a partir de la Figura 3.1a), donde N_{ER} es el número de frecuencias de estudio. Del mismo modo, se denota por ER_j^{anl} con $j = 1, \dots, N_{\text{ER}}$, a los valores analíticos calculados a partir de la solución del sistema (3.32). Se introduce, a partir del modelo, una función respuesta

$$\text{ER}_j^{\text{anl}} = \widehat{\text{ER}}_\delta(\delta_j, M_j, f_j), \quad (3.33)$$

donde $\delta_j = \text{Re}\left(\frac{2\pi f_j}{c_p}\right)L$, $M_j = e^{\text{Im}\left(\frac{2\pi f_j}{c_p}\right)L}$ y f_j es la frecuencia de trabajo. El problema de minimización viene dado por

$$(\delta_j, M_j) = \arg \min_{\delta, M > 0} \phi_j^{\text{ER}}(\delta, M),$$

donde

$$\phi_j^{\text{ER}}(\delta, M) = \frac{|\text{ER}_j^{\text{exp}} - \widehat{\text{ER}}_\delta(\delta, M, f_j)|}{|\text{ER}_j^{\text{exp}}|}, \quad (3.34)$$

para cada $j = 1, \dots, N_{\text{ER}}$. Una vez realizado el ajuste, se puede calcular el error relativo cometido en norma L_2 utilizando la siguiente expresión:

$$\mathcal{E}_{\text{ER}} = 100 \times \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{ER}}} |\text{ER}_j^{\text{exp}} - \widehat{\text{ER}}_\delta(\delta_j, M_j, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{ER}}} |\text{ER}_j^{\text{exp}}|^2}}. \quad (3.35)$$

Nivel de pérdida por inserción

Se denota por IL_j^{exp} con $j = 1, \dots, N_{\text{IL}}$ a los valores experimentales obtenidos al medir la pérdida por inserción en la configuración sin placa (obtenidos a partir de la Figura 3.1b), donde N_{IL} es el número de frecuencias de estudio. Del mismo modo, se denota por IL_j^{anl} con $j = 1, \dots, N_{\text{IL}}$, a los valores analíticos calculados a partir de la solución del sistema (3.32). Se introduce, a partir del modelo, una función respuesta

$$\text{IL}_j^{\text{anl}} = \widehat{\text{IL}}_\delta(\delta_j, M_j, f_j), \quad (3.36)$$

donde $\delta_j = \text{Re} \left(\frac{2\pi f_j}{c_p} \right) L$, $M_j = e^{\text{Im} \left(\frac{2\pi f_j}{c_p} \right) L}$ y f_j es la frecuencia de trabajo. El problema de ajuste viene dado por

$$(\delta_j, M_j) = \arg \min_{\delta, M > 0} \phi_j^{\text{IL}}(\delta, M),$$

donde

$$\phi_j^{\text{IL}}(\delta, M) = \frac{|\mathbb{I}L_j^{\text{exp}} - \widehat{\mathbb{I}L}_\delta(\delta, M, f_j)|}{|\mathbb{I}L_j^{\text{exp}}|}, \quad (3.37)$$

para cada $j = 1, \dots, N_{\text{IL}}$. Una vez realizado el ajuste, se puede calcular el error relativo cometido en norma L_2 utilizando la siguiente expresión:

$$\mathcal{E}_{\text{IL}} = 100 \times \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{IL}}} |\mathbb{I}L_j^{\text{exp}} - \widehat{\mathbb{I}L}_\delta(\delta_j, M_j, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{IL}}} |\mathbb{I}L_j^{\text{exp}}|^2}}. \quad (3.38)$$

Coefficiente de disipación de potencia

Se denota por $\text{FPD}_j^{\text{exp}}$ con $j = 1, \dots, N_{\text{FPD}}$ a los valores experimentales obtenidos al medir el coeficiente de disipación de potencia en la configuración sin placa (obtenidos a partir de la Figura 3.1c), donde N_{FPD} es el número de frecuencias de estudio. Del mismo modo, se denota por $\text{FPD}_j^{\text{anl}}$ con $j = 1, \dots, N_{\text{FPD}}$, a los valores analíticos calculados a partir de la solución del sistema (3.32). Se introduce, a partir del modelo, una función respuesta

$$\text{FPD}_j^{\text{anl}} = \widehat{\text{FPD}}_\delta(\delta_j, M_j, f_j), \quad (3.39)$$

donde $\delta_j = \text{Re} \left(\frac{2\pi f_j}{c_p} \right) L$, $M_j = e^{\text{Im} \left(\frac{2\pi f_j}{c_p} \right) L}$ y f_j es la frecuencia de trabajo. El problema de minimización está descrito por

$$(\delta_j, M_j) = \arg \min_{\delta, M > 0} \phi_j^{\text{FPD}}(\delta, M),$$

donde

$$\phi_j^{\text{FPD}}(\delta, M) = \frac{|\text{FPD}_j^{\text{exp}} - \widehat{\text{FPD}}_\delta(\delta, M, f_j)|}{|\text{FPD}_j^{\text{exp}}|}, \quad (3.40)$$

para cada $j = 1, \dots, N_{\text{FPD}}$. Una vez realizado el ajuste, se puede calcular el error relativo cometido en norma L_2 utilizando la siguiente expresión:

$$\mathcal{E}_{\text{FPD}} = 100 \times \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{FPD}}} |\text{FPD}_j^{\text{exp}} - \widehat{\text{FPD}}_\delta(\delta_j, M_j, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{FPD}}} |\text{FPD}_j^{\text{exp}}|^2}}. \quad (3.41)$$

Ajuste conjunto

Se denota por ER_j^{exp} , IL_j^{exp} y FPD_j^{exp} con $j = 1, \dots, N_{\text{freq}}$ a los valores experimentales obtenidos al medir el nivel de reducción de eco, la pérdida por inserción y el coeficiente de disipación de potencia, respectivamente, en la configuración sin placa (obtenidos a partir de las tres gráficas de la Figura 3.1), donde N_{freq} es el número de frecuencias de estudio en que se calculan los niveles. Se denota por ER_j^{anl} , IL_j^{anl} y FPD_j^{anl} , a las funciones respuesta definidas como en (3.33), (3.36) y (3.39), respectivamente. El problema de minimización viene dado por

$$(\delta_j, M_j) = \arg \min_{\delta, M > 0} \phi_j(\delta, M),$$

donde

$$\phi_j(\delta, M) = \phi_j^{\text{ER}}(\delta, M) + \phi_j^{\text{IL}}(\delta, M) + \phi_j^{\text{FPD}}(\delta, M), \quad (3.42)$$

para cada $j = 1, \dots, N_{\text{freq}}$. Una vez realizado el ajuste, se puede calcular el error relativo cometido en norma L_2 utilizando las expresiones (3.35), (3.38) y (3.41).

Para poder obtener los resultados numéricos asociados a estos ajustes se utiliza la función `fmincon` de MATLAB. Esta función intenta encontrar un mínimo de una función escalar de varias variables sujeto a un conjunto de restricciones no lineales, a partir de un determinado iterante inicial. La función `fmincon` permite elegir el algoritmo que se va a utilizar. En este caso, puesto que solo existen restricciones lineales sobre las variables y, además, no existen restricciones de igualdad, se utiliza el algoritmo `Trust Region Reflective`, basado en el método interior reflexivo de Newton (véanse [7] y [8] para más detalles).

A continuación, se detalla el cálculo del gradiente y el hessiano de ER_δ , IL_δ y FPD_δ que se utilizarán más adelante para calcular el gradiente y el hessiano de la función objetivo.

Si se denota por $A\vec{C} = \vec{b}$ al sistema (3.32) y se deriva con respecto a M se obtiene

$$\frac{\partial A}{\partial M} \vec{C} + A \frac{\partial \vec{C}}{\partial M} = \frac{\partial \vec{b}}{\partial M}, \quad (3.43)$$

donde

$$\frac{\partial A}{\partial M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{Z_1 i}{\rho_s \omega M L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\delta} & -\frac{e^{i\delta}}{M^2} & 0 \\ 0 & -e^{-i\delta} & -\frac{e^{i\delta}}{M^2} & -\frac{Z_1 i}{\rho_s \omega M L} e^{ik_1 L} \end{pmatrix} \quad y \quad \frac{\partial \vec{b}}{\partial M} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{Z_1 i}{\rho_s \omega M L} C_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Así, a partir de (3.43) se puede calcular $\frac{\partial \vec{C}}{\partial M}$. Se deriva el sistema (3.32) con respecto a δ obteniendo

$$\frac{\partial A}{\partial \delta} \vec{C} + A \frac{\partial \vec{C}}{\partial \delta} = \frac{\partial \vec{b}}{\partial \delta}, \quad (3.44)$$

donde

$$\frac{\partial A}{\partial \delta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{Z_1}{\rho_s \omega L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -ie^{-i\delta} M & i\frac{e^{i\delta}}{M} & 0 \\ 0 & ie^{-i\delta} M & i\frac{e^{i\delta}}{M} & -\frac{Z_1}{\rho_s \omega L} e^{ik_1 L} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \vec{b}}{\partial \delta} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{Z_1}{\rho_s \omega L} C_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Así, a partir de (3.44) se puede calcular $\frac{\partial \vec{C}}{\partial \delta}$. Se deriva (3.43) con respecto a M obteniendo

$$\frac{\partial^2 A}{\partial M^2} \vec{C} + 2 \frac{\partial A}{\partial M} \frac{\partial \vec{C}}{\partial M} + A \frac{\partial^2 \vec{C}}{\partial M^2} = \frac{\partial^2 \vec{b}}{\partial M^2},$$

donde

$$\frac{\partial^2 A}{\partial M^2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{Z_1 i}{\rho_s \omega M^2 L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2e^{i\delta}}{M^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2e^{i\delta}}{M^3} & \frac{Z_1 i}{\rho_s \omega M^2 L} e^{ik_1 L} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 \vec{b}}{\partial M^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{Z_1 i}{\rho_s \omega M^2 L} C_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A partir de (3.2.4) se obtiene $\frac{\partial^2 \vec{C}}{\partial M^2}$. Se deriva (3.43) con respecto a δ obteniendo

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \delta \partial M} \vec{C} + \frac{\partial A}{\partial M} \frac{\partial \vec{C}}{\partial \delta} + \frac{\partial A}{\partial \delta} \frac{\partial \vec{C}}{\partial M} + A \frac{\partial^2 \vec{C}}{\partial \delta \partial M} = \frac{\partial^2 \vec{b}}{\partial \delta \partial M},$$

donde

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \delta \partial M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -ie^{-i\delta} & -i\frac{e^{i\delta}}{M^2} & 0 \\ 0 & ie^{-i\delta} & -i\frac{e^{i\delta}}{M^2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 \vec{b}}{\partial \delta \partial M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A partir de (3.2.4) se obtiene $\frac{\partial^2 \vec{C}}{\partial \delta \partial M}$. Se deriva (3.44) con respecto a δ obteniendo

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \delta^2} \vec{C} + 2 \frac{\partial A}{\partial \delta} \frac{\partial \vec{C}}{\partial \delta} + A \frac{\partial^2 \vec{C}}{\partial \delta^2} = \frac{\partial^2 \vec{b}}{\partial \delta^2},$$

donde

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \delta^2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-i\delta} M & -\frac{e^{i\delta}}{M} & 0 \\ 0 & e^{-i\delta} M & -\frac{e^{i\delta}}{M} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 \vec{b}}{\partial \delta^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A partir de (3.2.4) se obtiene $\frac{\partial^2 \vec{C}}{\partial \delta^2}$. Con todas estas expresiones estamos en condiciones de calcular el gradiente y el hessiano de $\widehat{\text{ER}}_\delta$, $\widehat{\text{IL}}_\delta$ y $\widehat{\text{FPD}}_\delta$. A continuación se detalla cómo se han obtenido.

Teniendo en cuenta las funciones respuesta $\mathcal{R} = \widehat{\mathcal{R}}(\delta, M)$ y $\mathcal{T} = \widehat{\mathcal{T}}(\delta, M)$ a partir de las expresiones (2.123), (2.124) y (2.125) resulta

$$\nabla_{\delta, M} \widehat{\text{ER}}_{\delta} = \frac{-10}{|\widehat{\mathcal{R}}|^2 \log 10} \nabla_{\delta, M} |\widehat{\mathcal{R}}|^2, \quad (3.45)$$

$$\nabla_{\delta, M} \widehat{\text{IL}}_{\delta} = \frac{-10}{|\widehat{\mathcal{T}}|^2 \log 10} \nabla_{\delta, M} |\widehat{\mathcal{T}}|^2, \quad (3.46)$$

$$\nabla_{\delta, M} \widehat{\text{FPD}}_{\delta} = -100 \left(\nabla_{\delta, M} |\widehat{\mathcal{R}}|^2 + \nabla_{\delta, M} |\widehat{\mathcal{T}}|^2 \right), \quad (3.47)$$

donde $\nabla_{\delta, M}$ denota el gradiente con respecto a las variables δ y M y

$$\begin{aligned} \nabla_{\delta, M} |\widehat{\mathcal{R}}|^2 &= 2 \begin{pmatrix} \text{Re}(\widehat{C}_1) \text{Re} \left(\frac{\partial \widehat{C}_1}{\partial M} \right) + \text{Im}(\widehat{C}_1) \text{Im} \left(\frac{\partial \widehat{C}_1}{\partial M} \right) \\ \text{Re}(\widehat{C}_1) \text{Re} \left(\frac{\partial \widehat{C}_1}{\partial \delta} \right) + \text{Im}(\widehat{C}_1) \text{Im} \left(\frac{\partial \widehat{C}_1}{\partial \delta} \right) \end{pmatrix}, \\ \nabla_{\delta, M} |\widehat{\mathcal{T}}|^2 &= 2 \begin{pmatrix} \text{Re}(\widehat{C}_8) \text{Re} \left(\frac{\partial \widehat{C}_8}{\partial M} \right) + \text{Im}(\widehat{C}_8) \text{Im} \left(\frac{\partial \widehat{C}_8}{\partial M} \right) \\ \text{Re}(\widehat{C}_8) \text{Re} \left(\frac{\partial \widehat{C}_8}{\partial \delta} \right) + \text{Im}(\widehat{C}_8) \text{Im} \left(\frac{\partial \widehat{C}_8}{\partial \delta} \right) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

con \widehat{C}_1 y \widehat{C}_8 las funciones respuesta en términos de δ y M de las amplitudes de la onda reflejada y transmitida, respectivamente, en la solución del sistema (3.32).

Por otro lado, las expresiones para calcular el hessiano de $\widehat{\text{ER}}_{\delta}$, $\widehat{\text{IL}}_{\delta}$ y $\widehat{\text{FPD}}_{\delta}$ con respecto a las variables δ y M son

$$\text{Hess}_{\delta, M} (\widehat{\text{ER}}_{\delta}) = \frac{-10}{|\widehat{\mathcal{R}}|^4 \log 10} \left(|\widehat{\mathcal{R}}|^2 \text{Hess}_{\delta, M} (\widehat{\mathcal{R}}) - \nabla_{\delta, M} |\widehat{\mathcal{R}}|^2 \left(\nabla_{\delta, M} |\widehat{\mathcal{R}}|^2 \right)^t \right), \quad (3.48)$$

$$\text{Hess}_{\delta, M} (\widehat{\text{IL}}_{\delta}) = \frac{-10}{|\widehat{\mathcal{T}}|^4 \log 10} \left(|\widehat{\mathcal{T}}|^2 \text{Hess}_{\delta, M} (\widehat{\mathcal{T}}) - \nabla_{\delta, M} |\widehat{\mathcal{T}}|^2 \left(\nabla_{\delta, M} |\widehat{\mathcal{T}}|^2 \right)^t \right), \quad (3.49)$$

$$\text{Hess}_{\delta, M} (\widehat{\text{FPD}}_{\delta}) = -100 \left(\text{Hess}_{\delta, M} (\widehat{\mathcal{R}}) + \text{Hess}_{\delta, M} (\widehat{\mathcal{T}}) \right), \quad (3.50)$$

donde $\text{Hess}_{\delta, M} (\widehat{\mathcal{R}})$ y $\text{Hess}_{\delta, M} (\widehat{\mathcal{T}})$ son el hessiano de $\widehat{\mathcal{R}}$ y $\widehat{\mathcal{T}}$, respectivamente, con respecto a las variables δ y M .

Por tanto, si consideramos la expresión (3.34), para cada frecuencia $j = 1, \dots, N_{\text{ER}}$, se cumple

$$\nabla_{\delta, M} (\phi_j^{\text{ER}}(\delta, M)) = \frac{\text{signo} \left(\text{ER}_j^{\text{exp}} - \widehat{\text{ER}}_{\delta}(\delta_j, M_j, f_j) \right)}{|\widehat{\text{ER}}^{\text{exp}}|} \nabla_{\delta, M} \widehat{\text{ER}}_{\delta_j}(\delta, M, f_j),$$

$$\text{Hess}_{\delta, M} (\phi_j^{\text{ER}}(\delta, M)) = \frac{\text{signo} \left(\text{ER}_j^{\text{exp}} - \widehat{\text{ER}}_{\delta}(\delta_j, M_j, f_j) \right)}{|\widehat{\text{ER}}^{\text{exp}}|} \text{Hess}_{\delta, M} \widehat{\text{ER}}_{\delta_j}(\delta, M, f_j),$$

donde ϕ_j^{ER} es la función objetivo definida en (3.34) para cada frecuencia f_j , con $j = 1, \dots, N_{\text{ER}}$.

Si consideramos la expresión dada por (3.37), para cada frecuencia f_j con $j = 1, \dots, N_{\text{IL}}$, se cumple

$$\begin{aligned}\nabla_{\delta, M}(\phi_j^{\text{IL}}(\delta, M)) &= \frac{\text{signo}\left(\text{IL}_j^{\text{exp}} - \widehat{\text{IL}}_{\delta}(\delta_j, M_j, f_j)\right)}{|\widehat{\text{IL}}^{\text{exp}}|} \nabla_{\delta, M} \widehat{\text{IL}}_{\delta_j}(\delta, M, f_j), \\ \text{Hess}_{\delta, M}(\phi_j^{\text{IL}}(\delta, M)) &= \frac{\text{signo}\left(\text{IL}_j^{\text{exp}} - \widehat{\text{IL}}_{\delta}(\delta_j, M_j, f_j)\right)}{|\widehat{\text{IL}}^{\text{exp}}|} \text{Hess}_{\delta, M} \widehat{\text{IL}}_{\delta_j}(\delta, M, f_j),\end{aligned}$$

donde ϕ_j^{IL} es la función objetivo definida en (3.37), para cada frecuencia f_j con $j = 1, \dots, N_{\text{IL}}$.

De forma análoga, realizamos el mismo ajuste para el nivel FPD. Si se considera la expresión (3.40), para cada frecuencia f_j con $j = 1, \dots, N_{\text{FPD}}$, se cumple

$$\begin{aligned}\nabla_{\delta, M}(\phi_j^{\text{FPD}}(\delta, M)) &= \frac{\text{signo}\left(\text{FPD}_j^{\text{exp}} - \widehat{\text{FPD}}_{\delta}(\delta_j, M_j, f_j)\right)}{|\widehat{\text{FPD}}^{\text{exp}}|} \nabla_{\delta, M}(\widehat{\text{FPD}}_{\delta_j}(\delta, M, f_j)), \\ \text{Hess}_{\delta, M}(\phi_j^{\text{FPD}}(\delta, M)) &= \frac{\text{signo}\left(\text{FPD}_j^{\text{exp}} - \widehat{\text{FPD}}_{\delta}(\delta_j, M_j, f_j)\right)}{|\widehat{\text{FPD}}^{\text{exp}}|} \text{Hess}_{\delta, M}(\widehat{\text{FPD}}_{\delta_j}(\delta, M, f_j)),\end{aligned}$$

donde ϕ_j^{FPD} es la función objetivo definida en (3.40), para cada frecuencia f_j con $j = 1, \dots, N_{\text{FPD}}$.

En el ajuste conjunto, se considera (3.42) para cada frecuencia f_j con $j = 1, \dots, N_{\text{freq}}$. En este caso conjunto, es fácil comprobar que se cumple $\nabla_{\delta, M} \phi_j = \nabla_{\delta, M} \phi_j^{\text{ER}} + \nabla_{\delta, M} \phi_j^{\text{IL}} + \nabla_{\delta, M} \phi_j^{\text{FPD}}$ y $\text{Hess}_{\delta, M} \phi_j = \text{Hess}_{\delta, M} \phi_j^{\text{ER}} + \text{Hess}_{\delta, M} \phi_j^{\text{IL}} + \text{Hess}_{\delta, M} \phi_j^{\text{FPD}}$, donde ϕ_j es la función objetivo definida en (3.42), para cada frecuencia f_j con $j = 1, \dots, N_{\text{freq}}$. Los gradientes y hessianos calculados se han implementado en diferentes funciones para posteriormente ser utilizados en el proceso de minimización del ajuste.

Los resultados numéricos obtenidos para el modelo sin placa rígida trabajando con frecuencias entre 20 y 200 kHz son los mostrados en la Figura 3.11 (para el ajuste individual) y en la Figura 3.12 (para el ajuste conjunto). En la Tabla 3.5 se muestran los errores relativos cometidos en cada uno de los ajustes realizados frecuencia a frecuencia, calculados como se indica en (3.35), (3.38) y (3.41) tanto para los ajustes individuales como para el ajuste conjunto.

Si tenemos en cuenta los resultados obtenidos en el ajuste conjunto (véase Tabla 3.5), el resultado obtenido para el nivel ER es el menos preciso. Es por este motivo que se ha descartado su uso y se han considerado solamente los datos de los niveles IL y FPD para realizar el ajuste en la configuración sin placa rígida. A continuación se describe este nuevo ajuste.

Se denota por IL_j^{exp} y $\text{FPD}_j^{\text{exp}}$ con $j = 1, \dots, N_{\text{freq}}$, a los valores experimentales obtenidos al medir la pérdida por inserción y el coeficiente de disipación de potencia, respectivamente, siendo N_{freq} el número de frecuencias de estudio en que se calculan los niveles. Estos valores, medidos en el experimento que posee la configuración sin

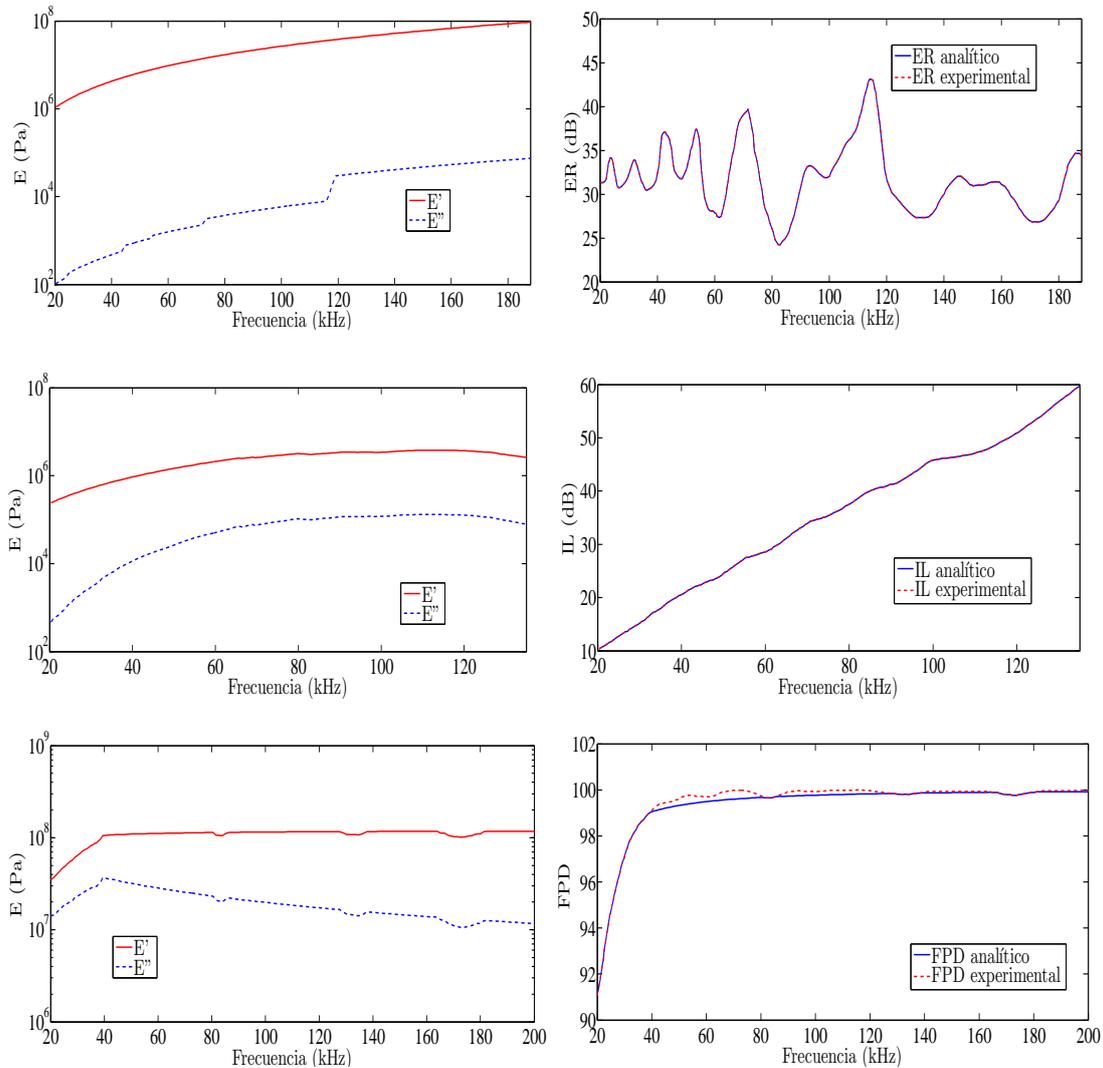


Figura 3.11: Representación gráfica con respecto a la frecuencia, de los niveles ER (arriba derecha), IL (en medio derecha) y FPD (abajo derecha) tanto experimentales (línea azul discontinua) como numéricos (línea roja continua) utilizando las funciones objetivo (3.34), (3.37) y (3.40), en la configuración sin placa. La parte real e imaginaria del módulo de Young calculados en cada ajuste se muestran en las gráficas de la izquierda.

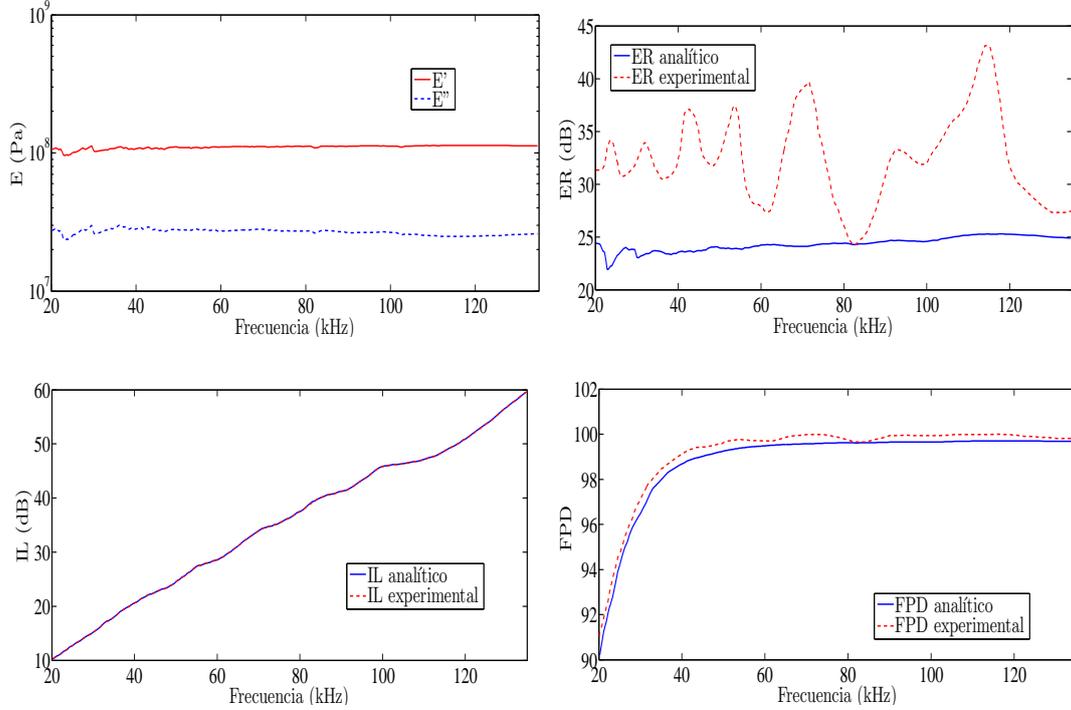


Figura 3.12: Representación gráfica con respecto a la frecuencia, de los niveles ER (arriba a la derecha), IL (abajo a la izquierda) y FPD (abajo a la derecha) tanto experimentales (línea azul discontinua) como numéricos (línea roja continua) utilizando la función objetivo mostrada en (3.42) en una configuración sin placa. La parte real e imaginaria del módulo de Young calculado en el ajuste se muestran en la gráfica de arriba a la izquierda.

| Errores | Ajuste ER | Ajuste IL | Ajuste FPD | Ajuste Conjunto |
|---------------------|---------------------------|---------------------------|------------|-----------------|
| \mathcal{E}_{ER} | $4.16 \times 10^{-10} \%$ | 92.02 % | 94.81 % | 29.44 % |
| \mathcal{E}_{IL} | 100 % | $3.39 \times 10^{-12} \%$ | 100.17 % | 0.037 % |
| \mathcal{E}_{FPD} | 92.74 % | 54.55 % | 0.15 % | 0.39 % |

Tabla 3.5: Errores relativos obtenidos en el ajuste de los datos experimentales en la configuración sin placa, utilizando como variables en el problema de minimización δ y M .

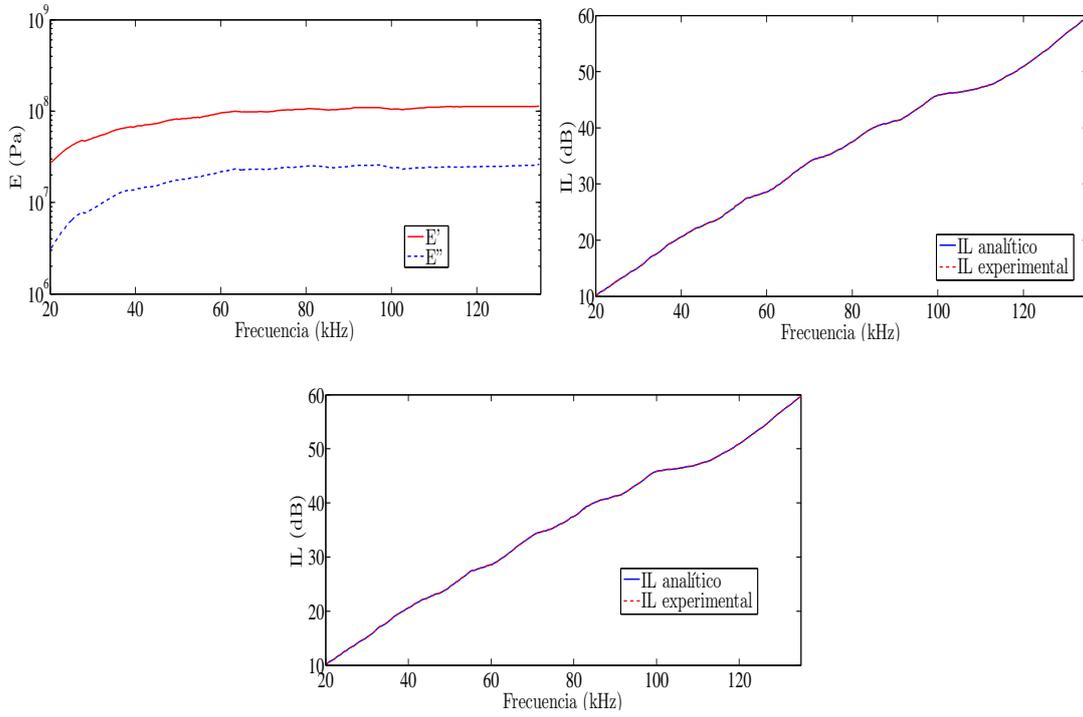


Figura 3.13: Representación gráfica, con respecto a la frecuencia, de los niveles IL (arriba a la derecha), FPD (abajo) tanto experimentales (línea azul discontinua) como numéricos (línea roja continua) usando la función objetivo mostrada en (3.51) en una configuración sin placa. La parte real e imaginaria del módulo de Young se muestran en la gráfica de arriba a la izquierda.

placa han sido obtenidos a partir de las gráficas de la Figura 3.1. Se denota por IL_j^{anl} y FPD_j^{anl} , a las funciones respuesta definidas de igual modo que en (3.36) y (3.39), respectivamente. El problema de minimización viene dado por

$$(\delta_j, M_j) = \arg \min_{\delta, M > 0} \phi_j(\delta, M),$$

donde

$$\phi_j(\delta, M) = \phi_j^{\text{ER}}(\delta, M) + \phi_j^{\text{IL}}(\delta, M) + \phi_j^{\text{FPD}}(\delta, M), \quad (3.51)$$

para cada $j = 1, \dots, N_{\text{freq}}$. Una vez realizado el ajuste, se puede calcular el error relativo en norma L_2 , cometido en el ajuste de los niveles IL y FPD utilizando las expresiones (3.38) y (3.41). Los resultados numéricos obtenidos para este nuevo ajuste en el modelo sin placa rígida trabajando con frecuencias entre 20 y 140 kHz son los mostrados en la Figura 3.13.

En la Tabla 3.6 se observa que aunque no se consideren los datos experimentales del nivel ER en el proceso de ajuste, los errores cometidos al utilizar los datos experimentales de los niveles IL y FPD son similares a los obtenidos en el ajuste conjunto de los niveles ER, IL y FPD. Sin embargo ahora la gráfica de la parte real y de la parte

| Errores | Ajuste con ER | Ajuste sin ER |
|---------------------|---------------|--------------------------|
| \mathcal{E}_{ER} | 29.44 % | 41.64 % |
| \mathcal{E}_{IL} | 0.04 % | 2.42×10^{-10} % |
| \mathcal{E}_{FPD} | 0.39 % | 2.76 % |

Tabla 3.6: Errores relativos obtenidos en el ajuste de los datos experimentales en la configuración con placa entre el ajuste conjunto con ER y el ajuste conjunto sin ER

imaginaria del módulo de Young tienen cualitativamente un comportamiento similar al que se observa en otros ajustes con datos experimentales (véase, por ejemplo, el trabajo [14]).

Si se comparan los errores de la Tabla 3.5 y de la Tabla 3.6 con los obtenidos en los ajustes anteriores, se aprecia que dichos errores apenas mejoran. Sin embargo, si observamos las gráficas de la parte real y la parte imaginaria del módulo de Young (véanse las Figuras 3.11 y 3.12), vemos que dichas gráficas son mucho más suaves que las obtenidas en el ajuste en donde se consideraban como variables E' y E'' en el problema de minimización y no se utilizaba la información del gradiente y el hessiano de la función objetivo (véanse las Figuras 3.8 y 3.9). De hecho, como ya se ha indicado, la respuesta en frecuencia del módulo de Young reproduce cualitativamente el comportamiento mecánico de materiales poliméricos descrito en el trabajo [14], en el cuál se aprecia que tanto la parte real como la parte imaginaria del módulo de Young decrece rápidamente a medida que decrece la frecuencia.

3.3. Ajuste de los coeficientes de viscosidad y elasticidad de la placa rígida

Para poder realizar el ajuste en la configuración con placa se necesitan los coeficientes de viscosidad y elasticidad asociados al montaje de la placa rígida de acero. Para calcular dichos coeficientes se han realizado dos ajustes diferentes. En el primero de ellos, se ha utilizado la parte real e imaginaria del módulo de Young constantes obtenidas a partir del ajuste realizado con el nivel de reducción de eco en la configuración sin placa (3.2). De forma similar a como se ha realizado en los ajustes para la configuración sin placa rígida, en el segundo ajuste se ha tenido en cuenta la información del gradiente y del hessiano y se ha utilizado la parte real e imaginaria del módulo de Young, dependientes de δ y M , obtenidas a partir del ajuste del nivel de reducción de eco en la configuración sin placa (3.34). A continuación se han detallado cada uno de los dos ajustes realizados.

3.3.1. Ajuste considerando módulo de Young constante

Se ha considerado el ajuste realizado para calcular la parte real e imaginaria del módulo de Young constantes, en la configuración sin placa. Teniendo en cuenta el módulo de Young obtenido, se ha realizado un ajuste en la configuración con placa

para encontrar el coeficiente de viscosidad y el de elasticidad de la placa, ambos constantes. Para ello, se denota por $ER_{p_j}^{\text{exp}}$ con $j = 1, \dots, N_{\text{ER}}$ a los valores experimentales obtenidos al medir la reducción de eco en la configuración con placa (obtenidos a partir de la Figura 3.2a), donde N_{ER} es el número de frecuencias de estudio. Del mismo modo, se denota por $ER_{p_j}^{\text{anl}}$ con $j = 1, \dots, N_{\text{ER}}$, a los valores analíticos calculados a partir de la solución del sistema (2.105), en el cuál se introduce $E = E' - iE''$ y donde los valores de E' y E'' son las constantes obtenidas en el ajuste realizado en la Sección 3.2.1 para el nivel de reducción de eco en la configuración sin placa (3.2). Se introduce, a partir del modelo, una función respuesta

$$ER_{p_j}^{\text{anl}} = \widehat{ER}_p(E, s, r, f_j),$$

donde s y r son los coeficientes de viscosidad y elasticidad, respectivamente, asociados al movimiento de la placa rígida y f_j es la frecuencia de trabajo. El problema de ajuste, en este caso, viene descrito por

$$(s, r) = \arg \min_{x, y > 0} \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{ER}}} |ER_{p_j}^{\text{exp}} - \widehat{ER}_p(E, x, y, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{ER}}} |ER_{p_j}^{\text{exp}}|^2}}.$$

Los valores obtenidos en este ajuste son $s = 6.656 \times 10^5$ kg/ms y $r = 9.884 \times 10^9$ kg/m².

3.3.2. Ajuste con información de gradiente y hessiano

De forma análoga a como se ha procedido en los ajustes sin placa, se ha realizado un ajuste considerando que las variables del problema de minimización son $\delta = \text{Re}(k_p)L$ y $M = e^{\text{Im}(k_p)L}$. Se ha utilizado esta misma estrategia de ajuste para encontrar los valores del coeficiente de viscosidad y de elasticidad de la placa.

El sistema que se resuelve en el caso del problema de propagación en la configuración con placa viene dado por (véase el sistema (2.105))

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -\rho_0 c_0^2 k_1 & (2\mu + \lambda)k_p & -(2\mu + \lambda)k_p & 0 \\ 0 & e^{-ik_p L} & e^{ik_p L} & -e^{ik_1 L} \\ 0 & -(2\mu + \lambda)ik_p e^{-ik_p L} & (2\mu + \lambda)ik_p e^{ik_p L} & (-\rho_0 c_0^2 ik_1 - m\omega^2 - i\omega s + r)e^{ik_1 L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_2 \\ -\rho_0 c_0^2 k_1 C_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.52)$$

A continuación, se reescribe dicho sistema para escribirlo, al igual que hemos hecho en el caso de la configuración sin placa, en función de $\delta = \text{Re}(k_p)L$ y $M = e^{\text{Im}(k_p)L}$. Si introducimos las impedancias características $Z_1 = \rho_0 c_0$ y $Z_2 = \rho_s c_s = \rho_s \frac{\omega}{k_p} = \frac{\rho_s \omega L}{\delta + i \log M}$,

el sistema lineal (3.52) se puede reescribir como

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -Z_1\omega & Z_2\omega & -Z_2\omega & 0 \\ 0 & e^{-i\delta}M & \frac{e^{i\delta}}{M} & -e^{ik_1L} \\ 0 & -iZ_2\omega e^{-i\delta}M & iZ_2\omega \frac{e^{i\delta}}{M} & -i\omega(Z_1 + Z_p)e^{ik_1L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_2 \\ -Z_1\omega C_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde Z_p es la impedancia mecánica asociada a la placa rígida, esto es,

$$Z_p = s + i \left(-\omega m + \frac{r}{\omega} \right).$$

Dividiendo tanto la segunda fila como la cuarta por ωZ_2 , se obtiene el sistema a resolver

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -\frac{Z_1}{Z_2} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & e^{-i\delta}M & \frac{e^{i\delta}}{M} & -e^{ik_1L} \\ 0 & -ie^{-i\delta}M & i\frac{e^{i\delta}}{M} & -i\left(\frac{Z_1+Z_p}{Z_2}\right)e^{ik_1L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_2 \\ -\frac{Z_1}{Z_2}C_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.53)$$

Para obtener los resultados numéricos se ha utilizado la función `fmincon` que busca el mínimo de una función escalar de varias variables, a partir de un iterante inicial. Al igual que se ha realizado anteriormente en la configuración sin placa, puesto que solo existen restricciones lineales sobre las variables y, además, no existen restricciones de igualdad, se utiliza el algoritmo `Trust Region Reflective`, basado en el método interior reflexivo de Newton (véanse [7] y [8]).

A continuación, se detalla el cálculo del gradiente y el hessiano de \widehat{ER}_{p_δ} , \widehat{IL}_{p_δ} y \widehat{FPD}_{p_δ} en el caso de la configuración con placa, para utilizarlos después para calcular el gradiente y el hessiano de las funciones objetivo usadas en los ajustes.

Si se denota por $A\vec{C} = \vec{b}$ al sistema (3.53) y se deriva con respecto a M se obtiene

$$\frac{\partial A}{\partial M}\vec{C} + A\frac{\partial \vec{C}}{\partial M} = \frac{\partial \vec{b}}{\partial M}, \quad (3.54)$$

donde

$$\frac{\partial A}{\partial M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{Z_1 i}{\rho_s \omega M L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\delta} & -\frac{e^{i\delta}}{M^2} & 0 \\ 0 & -ie^{-i\delta} & -\frac{ie^{i\delta}}{M^2} & \frac{Z_1+Z_p}{\rho_s \omega M L} e^{ik_1L} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \vec{b}}{\partial M} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{Z_1 i}{\rho_s \omega M L} C_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A partir de (3.54) se ha calculado $\frac{\partial \vec{C}}{\partial M}$. De la misma forma, al derivar $A\vec{C} = \vec{b}$ con respecto a δ , se obtiene

$$\frac{\partial A}{\partial \delta}\vec{C} + A\frac{\partial \vec{C}}{\partial \delta} = \frac{\partial \vec{b}}{\partial \delta}, \quad (3.55)$$

donde

$$\frac{\partial A}{\partial \delta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{Z_1}{\rho_s \omega L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -ie^{-i\delta} M & i\frac{e^{i\delta}}{M} & 0 \\ 0 & -e^{-i\delta} M & -\frac{e^{i\delta}}{M} & -i\frac{Z_1+Z_p}{\rho_s \omega L} e^{ik_1 L} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \vec{b}}{\partial \delta} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{Z_1}{\rho_s \omega} C_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A partir de (3.55) se ha obtenido $\frac{\partial \vec{C}}{\partial \delta}$. Si se deriva (3.54) con respecto a M resulta

$$\frac{\partial^2 A}{\partial M^2} \vec{C} + 2 \frac{\partial A}{\partial M} \frac{\partial \vec{C}}{\partial M} + A \frac{\partial^2 \vec{C}}{\partial M^2} = \frac{\partial^2 \vec{b}}{\partial M^2},$$

donde

$$\frac{\partial^2 A}{\partial M^2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{Z_1 i}{\rho_s \omega M^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2e^{i\delta}}{M^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2ie^{i\delta}}{M^3} & -\frac{Z_1+Z_p}{\rho_s \omega M^2 L} e^{ik_1 L} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 \vec{b}}{\partial M^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{Z_1 i}{\rho_s \omega M^2} C_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A partir de (3.3.2) se ha calculado $\frac{\partial^2 \vec{C}}{\partial M^2}$. Análogamente, al derivar (3.54) con respecto a δ se tiene

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \delta \partial M} \vec{C} + \frac{\partial A}{\partial M} \frac{\partial \vec{C}}{\partial \delta} + \frac{\partial A}{\partial \delta} \frac{\partial \vec{C}}{\partial M} + A \frac{\partial^2 \vec{C}}{\partial \delta \partial M} = \frac{\partial^2 \vec{b}}{\partial \delta \partial M},$$

donde

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \delta \partial M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -ie^{-i\delta} & -\frac{ie^{i\delta}}{M^2} & 0 \\ 0 & -e^{-i\delta} & \frac{e^{i\delta}}{M^2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 \vec{b}}{\partial \delta \partial M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A partir de (3.3.2) se ha calculado $\frac{\partial^2 \vec{C}}{\partial \delta \partial M}$. De la misma forma, se deriva (3.55) con respecto a δ obteniendo

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \delta^2} \vec{C} + 2 \frac{\partial A}{\partial \delta} \frac{\partial \vec{C}}{\partial \delta} + A \frac{\partial^2 \vec{C}}{\partial \delta^2} = \frac{\partial^2 \vec{b}}{\partial \delta^2},$$

donde

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \delta^2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-i\delta} M & -\frac{e^{i\delta}}{M} & 0 \\ 0 & ie^{-i\delta} M & -\frac{ie^{i\delta}}{M} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 \vec{b}}{\partial \delta^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A partir de (3.3.2) se ha obtenido $\frac{\partial^2 \vec{C}}{\partial \delta^2}$. Las expresiones para el cálculo de $\nabla_{\delta, M}(\widehat{\text{ER}}_{p_\delta})$, $\nabla_{\delta, M}(\widehat{\text{IL}}_{p_\delta})$ y $\nabla_{\delta, M}(\widehat{\text{FPD}}_{p_\delta})$ son idénticas a las ya descritas en (3.45)-(3.47) y las expresiones para el cálculo de $\text{Hess}_{\delta, M}(\widehat{\text{ER}}_{p_\delta})$, $\text{Hess}_{\delta, M}(\widehat{\text{IL}}_{p_\delta})$ y $\text{Hess}_{\delta, M}(\widehat{\text{FPD}}_{p_\delta})$ idénticas a las introducidas en (3.48)-(3.50).

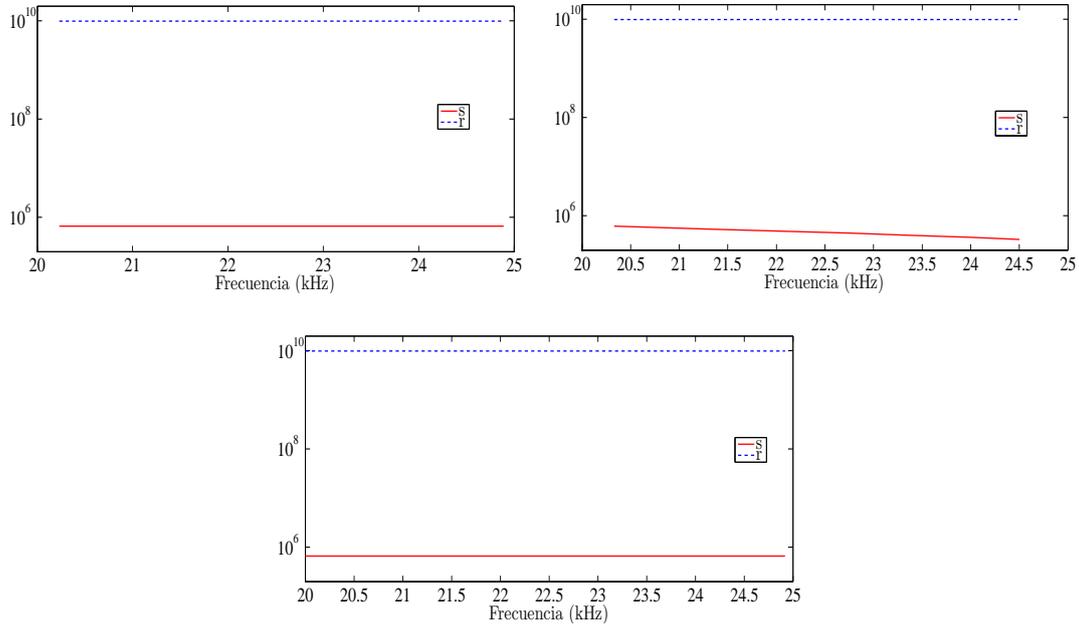


Figura 3.14: Valores numéricos de s (línea continua roja) y r (línea discontinua azul) obtenidos para las frecuencias entre 20 y 25 kHz en el ajuste con los datos experimentales de los niveles ER (arriba a la izquierda), IL (arriba a la derecha) y FPD (abajo).

Para realizar el ajuste de los coeficientes de viscosidad y elasticidad de la placa rígida, se denota por $ER_{p_j}^{\text{exp}}$ con $j = 1, \dots, N_{\text{ER}}$ a los valores experimentales obtenidos al medir la reducción de eco en la configuración con placa (obtenidos a partir de la Figura 3.2a), donde N_{ER} es el número de frecuencias de estudio. Del mismo modo, se denota por $ER_{p_j}^{\text{anl}}$ con $j = 1, \dots, N_{\text{ER}}$, a los valores numéricos calculados a partir de la solución del sistema (3.53), donde se introducen los valores de E' y E'' entre 20 y 25 kHz, calculados en la sección 3.2.4, dependientes de la frecuencia y obtenidos en el ajuste realizado previamente para el nivel de reducción de eco en la configuración sin placa (3.34).

Se introduce, a partir del modelo matemático, una función respuesta

$$ER_{p_j}^{\text{anl}} = \widehat{ER}_{p_\delta}(\delta, M, s_j, r_j, f_j),$$

donde s_j y r_j son los coeficientes de viscosidad y elasticidad, respectivamente, asociados al movimiento de la placa rígida para cada frecuencia y f_j es la frecuencia de trabajo. El problema de ajuste se describe como

$$(s_j, r_j) = \arg \min_{x, y > 0} \frac{|ER_{p_j}^{\text{exp}} - \widehat{ER}_{p_\delta}(\delta, M, x, y, f_j)|}{|ER_j^{\text{exp}}|}. \quad (3.56)$$

Los resultados numéricos obtenidos realizando el ajuste (3.56) considerando los datos experimentales de los niveles ER, IL y FPD se muestran en la Figura 3.14.

Como se puede observar, los valores de s y r son prácticamente constantes para todas las frecuencias entre 20 y 25 kHz en las tres gráficas (en realidad, en el ajuste del nivel ER y FPD son constantes). Como se puede apreciar en (2.125), el coeficiente de disipación de potencia contiene información tanto del nivel ER como del IL. Es por ello que se han elegido los valores de los coeficientes de viscosidad y elasticidad constantes resultantes del ajuste del nivel FPD, es decir, $s = 6.656 \times 10^5$ kg/ms y $r = 9.883 \times 10^9$ kg/m².

3.4. Ajuste del módulo de Young en la configuración con placa

Una vez que se han encontrado los valores de s y r asociados al movimiento de la placa rígida, se van a realizar una serie de ajustes en la configuración con placa, teniendo en cuenta distintas suposiciones sobre la parte real y la parte imaginaria del módulo de Young.

3.4.1. Ajuste considerando E' y E'' constantes

Se ha realizado un primer ajuste en el que se considerará que la parte real y la parte imaginaria del módulo de Young, E' y E'' respectivamente, son constantes.

Nivel de reducción de eco

Se denota por $ER_{p_j}^{\text{exp}}$ con $j = 1, \dots, N_{\text{ER}}$ a los valores experimentales obtenidos al medir la reducción de eco en la configuración con placa (obtenidos a partir de la Figura 3.2a), donde N_{ER} es el número de frecuencias de estudio. Del mismo modo, se denota por $ER_{p_j}^{\text{anl}}$ con $j = 1, \dots, N_{\text{ER}}$, a los valores numéricos calculados a partir de la solución del sistema (2.120). Se introduce, a partir del modelo, una función respuesta

$$ER_{p_j}^{\text{anl}} = \widehat{ER}_p(E, s, r, f_j), \quad (3.57)$$

donde $E = E' - iE''$ y f_j es la frecuencia de trabajo. Así, el problema de minimización en este caso viene dado por

$$(E', E'') = \arg \min_{x, y > 0} \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{ER}}} |ER_{p_j}^{\text{exp}} - \widehat{ER}_p(x - iy, s, r, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{ER}}} |ER_{p_j}^{\text{exp}}|^2}}. \quad (3.58)$$

Una vez realizado el ajuste, se puede calcular el error relativo cometido en norma L_2

con la siguiente expresión:

$$\mathcal{E}_{\text{ER}} = 100 \times \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{ER}}} |\text{ER}_{p_j}^{\text{exp}} - \widehat{\text{ER}}_p(E' - iE'', s, r, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{ER}}} |\text{ER}_{p_j}^{\text{exp}}|^2}}. \quad (3.59)$$

Nivel de pérdida por inserción

Se denota por $\text{IL}_{p_j}^{\text{exp}}$ con $j = 1, \dots, N_{\text{IL}}$ a los valores experimentales obtenidos al medir la pérdida por inserción en la configuración con placa (obtenidos a partir de la Figura 3.2b), donde N_{IL} es el número de frecuencias de estudio. Del mismo modo, se denota por IL_j^{anl} con $j = 1, \dots, N_{\text{IL}}$, a los valores numéricos calculados a partir de la solución del sistema (2.105). Se introduce, a partir del modelo, una función respuesta

$$\text{IL}_{p_j}^{\text{anl}} = \widehat{\text{IL}}_p(E, s, r, f_j), \quad (3.60)$$

donde el módulo de Young es $E = E' - iE''$ y f_j es la frecuencia de trabajo. De este modo, el problema de ajuste se describe como

$$(E', E'') = \arg \min_{x, y > 0} \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{IL}}} |\text{IL}_{p_j}^{\text{exp}} - \widehat{\text{IL}}_p(x - iy, s, r, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{IL}}} |\text{IL}_{p_j}^{\text{exp}}|^2}}. \quad (3.61)$$

Con este ajuste realizado, se puede calcular el error relativo cometido en norma L_2 del siguiente modo:

$$\mathcal{E}_{\text{IL}} = 100 \times \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{IL}}} |\text{IL}_{p_j}^{\text{exp}} - \widehat{\text{IL}}_p(E' - iE'', s, r, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{IL}}} |\text{IL}_{p_j}^{\text{exp}}|^2}}. \quad (3.62)$$

Coefficiente de disipación de potencia

Se denota por $\text{FPD}_{p_j}^{\text{exp}}$ con $j = 1, \dots, N_{\text{FPD}}$ a los valores experimentales obtenidos al medir el coeficiente de disipación de potencia en la configuración con placa (obtenidos a partir de la Figura 3.2c), donde N_{FPD} es el número de frecuencias de estudio. Del mismo modo, se denota por $\text{FPD}_{p_j}^{\text{anl}}$ con $j = 1, \dots, N_{\text{FPD}}$, a los valores numéricos calculados a partir de la solución del sistema (2.105). Se introduce, a partir del modelo, una función respuesta

$$\text{FPD}_{p_j}^{\text{anl}} = \widehat{\text{FPD}}_p(E, s, r, f_j), \quad (3.63)$$

donde el módulo de Young es $E = E' - iE''$ y f_j es la frecuencia de trabajo. De este modo, el problema de ajuste se describe como

$$(E', E'') = \arg \min_{x, y > 0} \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{FPD}}} |\text{FPD}_{p_j}^{\text{exp}} - \widehat{\text{FPD}}_p(x - iy, s, r, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{FPD}}} |\text{FPD}_{p_j}^{\text{exp}}|^2}}. \quad (3.64)$$

Una vez realizado el ajuste, se puede calcular el error relativo cometido en norma L_2 utilizando la siguiente expresión:

$$\mathcal{E}_{\text{FPD}} = 100 \times \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{FPD}}} |\text{FPD}_{p_j}^{\text{exp}} - \widehat{\text{FPD}}_p(E' - iE'', s, r, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{FPD}}} |\text{FPD}_{p_j}^{\text{exp}}|^2}}. \quad (3.65)$$

Ajuste conjunto

Se denota por $\text{ER}_{p_j}^{\text{exp}}$, $\text{IL}_{p_j}^{\text{exp}}$ y $\text{FPD}_{p_j}^{\text{exp}}$ con $j = 1, \dots, N_{\text{freq}}$ a los valores experimentales obtenidos al medir el nivel de reducción de eco, la pérdida por inserción y el coeficiente de disipación de potencia, respectivamente, en la configuración con placa (obtenidos a partir de la Figura 3.2), donde N_{freq} es el número de frecuencias de estudio en que se calculan los niveles. Se denota por $\text{ER}_{p_j}^{\text{anl}}$, $\text{IL}_{p_j}^{\text{anl}}$ y $\text{FPD}_{p_j}^{\text{anl}}$, a las funciones respuesta definidas en (3.57), (3.60) y (3.63), respectivamente. El problema de ajuste viene dado por

$$(E', E'') = \arg \min_{x, y > 0} \left(\frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{freq}}} |\text{ER}_{p_j}^{\text{exp}} - \widehat{\text{ER}}_p(x - iy, s, r, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{freq}}} |\text{ER}_{p_j}^{\text{exp}}|^2}} + \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{freq}}} |\text{IL}_{p_j}^{\text{exp}} - \widehat{\text{IL}}_p(x - iy, s, r, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{freq}}} |\text{IL}_{p_j}^{\text{exp}}|^2}} + \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{freq}}} |\text{FPD}_{p_j}^{\text{exp}} - \widehat{\text{FPD}}_p(x - iy, s, r, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{freq}}} |\text{FPD}_{p_j}^{\text{exp}}|^2}} \right). \quad (3.66)$$

Una vez realizado el ajuste, se puede calcular el error relativo cometido en norma L_2 , para cada uno de los niveles utilizando las expresiones (3.59), (3.62) y (3.65).

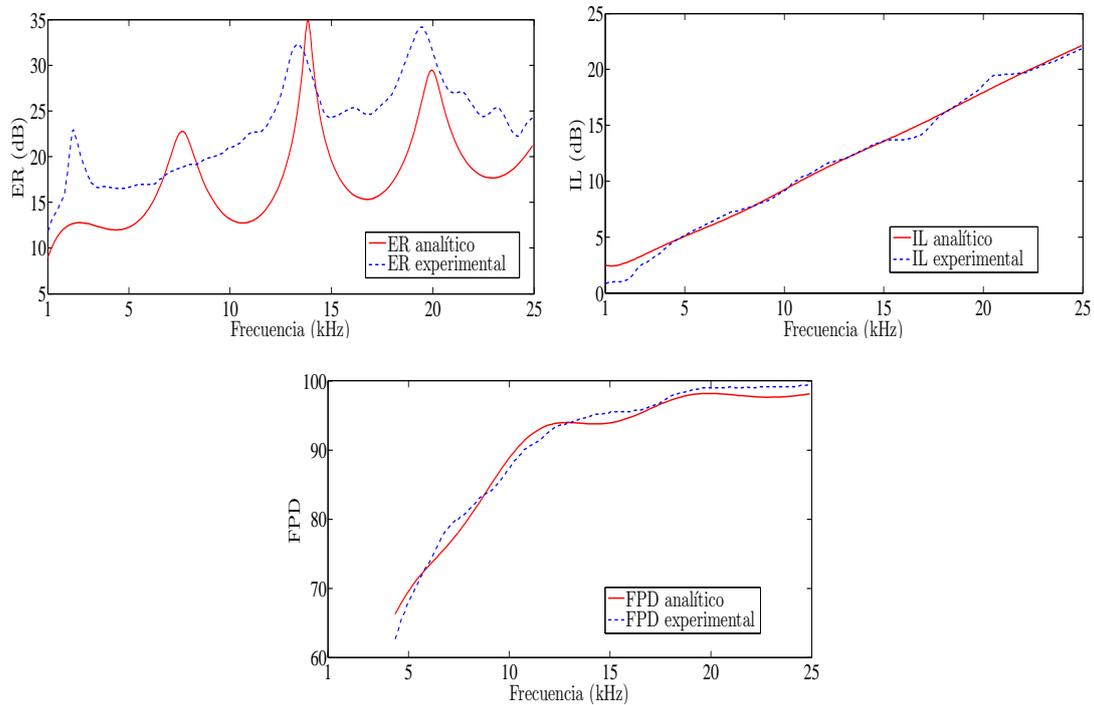


Figura 3.15: Representación gráfica con respecto a la frecuencia de los niveles ER (arriba a la izquierda), IL (arriba a la derecha) y FPD (abajo) tanto experimentales (línea azul discontinua) como numéricos (línea roja continua) usando las funciones objetivo (3.58), (3.61) y (3.64), en una configuración con placa rígida y asumiendo que el módulo de Young es complejo y constante.

Los resultados del ajuste para el modelo con placa rígida de acero trabajando con frecuencias entre 1 y 25 kHz son los mostrados en la Figura 3.15 para los ajustes individuales, utilizando las funciones objetivo (3.58), (3.61) y (3.64) y en la Figura 3.16 para el ajuste conjunto, utilizando la función objetivo (3.66). Los valores tanto de la parte real como de la imaginaria del módulo de Young, así como el error relativo cometido en cada ajuste está mostrado en la Tabla 3.7.

Como se puede observar en la Tabla 3.7, el error cometido al ajustar los datos experimentales del nivel ER tanto en el ajuste individual como en el ajuste conjunto, es aproximadamente del 27%, por lo que para mejorar el error cometido al realizar el ajuste debemos realizar otra suposición sobre la parte real e imaginaria del módulo de Young.

Ajuste considerando el módulo de Young como función lineal de la frecuencia

Con el objetivo de mejorar los resultados obtenidos suponiendo que el módulo de Young es constante, en lo que sigue se ha considerado que la parte imaginaria del módulo de Young de la plancha de polímeros se puede escribir como una función lineal de la

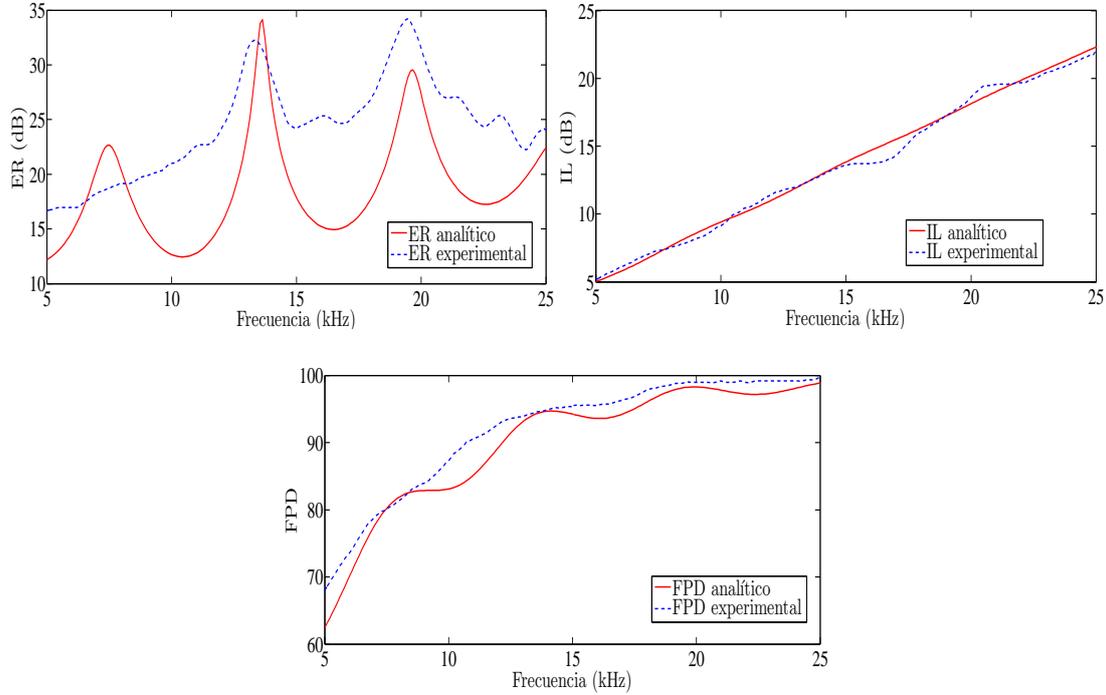


Figura 3.16: Representación gráfica con respecto a la frecuencia de los niveles ER (arriba a la izquierda), IL (arriba a la derecha) y FPD (abajo) tanto experimentales (línea azul discontinua) como numéricos (línea roja continua) usando la función objetivo (3.66) en una configuración con placa, asumiendo que el módulo de Young es complejo y constante.

| | ER | IL | FPD | Conjunto |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| E' | 8.902×10^7 | 2.105×10^8 | 1.385×10^8 | 8.697×10^7 |
| E'' | 2.364×10^7 | 1×10^8 | 5.857×10^7 | 2.257×10^7 |
| \mathcal{E}_{ER} | 27.55 % | 45.47 % | 29.8 % | 27.38 % |
| \mathcal{E}_{IL} | 6.97 % | 4.46 % | 10.7 % | 3.08 % |
| \mathcal{E}_{FPD} | 96.92 % | 96.62 % | 1.50 % | 2.59 % |

Tabla 3.7: Parte real e imaginaria del módulo de Young y errores cometidos en el ajuste de los datos experimentales en la configuración con placa asumiendo que el módulo de Young es constante y errores cometidos en los ajustes.

frecuencia. Más concretamente, siguiendo el modelo propuesto en [20], escribiremos el módulo de Young de la plancha de polímeros como

$$E = E' - i\omega E'',$$

donde E' y E'' continúan siendo asumidas constantes.

Nivel de reducción de eco

Se denota por $\text{ER}_{p_j}^{\text{exp}}$ con $j = 1, \dots, N_{\text{ER}}$ a los valores experimentales obtenidos al medir la reducción de eco en la configuración con placa (obtenidos a partir de la Figura 3.2a), donde N_{ER} es el número de frecuencias de estudio. Del mismo modo, se denota por $\text{ER}_{p_j}^{\text{anl}}$ con $j = 1, \dots, N_{\text{ER}}$, a los valores analíticos calculados a partir de la solución del sistema (2.105). Se introduce, a partir del modelo, una función respuesta

$$\text{ER}_{p_j}^{\text{anl}} = \widehat{\text{ER}}_p(E, s, r, f_j), \quad (3.67)$$

donde $E = E' - i2\pi f_j E''$ y f_j es la frecuencia de trabajo. El problema de ajuste viene dado por

$$(E', E'') = \arg \min_{x, y > 0} \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{ER}}} |\text{ER}_{p_j}^{\text{exp}} - \widehat{\text{ER}}_p(x - i2\pi f_j y, s, r, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{ER}}} |\text{ER}_{p_j}^{\text{exp}}|^2}}. \quad (3.68)$$

Una vez realizado el ajuste, se puede calcular el error relativo cometido en norma L_2 utilizando la siguiente expresión:

$$\mathcal{E}_{\text{ER}} = 100 \times \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{ER}}} |\text{ER}_{p_j}^{\text{exp}} - \widehat{\text{ER}}_p(E' - i2\pi f_j E'', s, r, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{ER}}} |\text{ER}_{p_j}^{\text{exp}}|^2}}. \quad (3.69)$$

Nivel de pérdida por inserción

Se denota por $\text{IL}_{p_j}^{\text{exp}}$ con $j = 1, \dots, N_{\text{IL}}$ a los valores experimentales obtenidos al medir la pérdida por inserción en la configuración con placa (obtenidos a partir de la Figura 3.2b), donde N_{IL} es el número de frecuencias de estudio. Del mismo modo, se denota por $\text{IL}_{p_j}^{\text{anl}}$ con $j = 1, \dots, N_{\text{IL}}$, a los valores analíticos calculados a partir de la solución del sistema (2.105). Se introduce, a partir del modelo, una función respuesta

$$\text{IL}_{p_j}^{\text{anl}} = \widehat{\text{IL}}_p(E, s, r, f_j), \quad (3.70)$$

donde el módulo de Young es $E = E' - i2\pi f_j E''$ y f_j es la frecuencia de trabajo. El

problema de minimización viene dado por

$$(E', E'') = \arg \min_{x, y > 0} \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{IL}} |\mathbb{I}L_{p_j}^{\text{exp}} - \widehat{\mathbb{I}L}_p(x - i2\pi f_j y, s, r, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{IL}} |\mathbb{I}L_{p_j}^{\text{exp}}|^2}}. \quad (3.71)$$

Con este ajuste realizado, se puede calcular el error relativo cometido en norma L_2 del siguiente modo:

$$\mathcal{E}_{IL} = 100 \times \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{IL}} |\mathbb{I}L_{p_j}^{\text{exp}} - \widehat{\mathbb{I}L}_p(E' - i2\pi f_j E'', s, r, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{IL}} |\mathbb{I}L_{p_j}^{\text{exp}}|^2}}. \quad (3.72)$$

Coefficiente de disipación de potencia

Se denota por $\text{FPD}_{p_j}^{\text{exp}}$ con $j = 1, \dots, N_{\text{FPD}}$ a los valores experimentales obtenidos al medir el coeficiente de disipación de potencia en la configuración sin placa (obtenidos a partir de la Figura 3.2c), donde N_{FPD} es el número de frecuencias de estudio. Del mismo modo, se denota por $\text{FPD}_{p_j}^{\text{anl}}$ con $j = 1, \dots, N_{\text{FPD}}$, a los valores analíticos calculados a partir de la solución del sistema (2.105). Se introduce, a partir del modelo, una función respuesta

$$\text{FPD}_{p_j}^{\text{anl}} = \widehat{\text{FPD}}_p(E, s, r, f_j), \quad (3.73)$$

donde el módulo de Young es $E = E' - i2\pi f_j E''$ y f_j es la frecuencia de trabajo. El problema de ajuste viene descrito por

$$(E', E'') = \arg \min_{x, y > 0} \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{FPD}}} |\text{FPD}_{p_j}^{\text{exp}} - \widehat{\text{FPD}}_p(x - i2\pi f_j y, s, r, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{FPD}}} |\text{FPD}_{p_j}^{\text{exp}}|^2}}. \quad (3.74)$$

Una vez realizado el ajuste, se puede calcular el error relativo cometido en norma L_2 utilizando la siguiente expresión:

$$\mathcal{E}_{\text{FPD}} = 100 \times \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{FPD}}} |\text{FPD}_{p_j}^{\text{exp}} - \widehat{\text{FPD}}_p(E' - i2\pi f_j E'', s, r, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{FPD}}} |\text{FPD}_{p_j}^{\text{exp}}|^2}}. \quad (3.75)$$

Ajuste conjunto

Se denota por $ER_{p_j}^{\text{exp}}$, $IL_{p_j}^{\text{exp}}$ y $FPD_{p_j}^{\text{exp}}$ con $j = 1, \dots, N_{\text{freq}}$ a los valores experimentales obtenidos al medir el nivel de reducción de eco, la pérdida por inserción y el coeficiente de disipación de potencia, respectivamente, en la configuración con placa (obtenidos a partir de las tres gráficas de la Figura 3.2), donde N_{freq} es el número de frecuencias de estudio en que se calculan los niveles. Se denota por $ER_{p_j}^{\text{anl}}$, $IL_{p_j}^{\text{anl}}$ y $FPD_{p_j}^{\text{anl}}$ a las funciones respuesta dadas por (3.67), (3.70) y (3.73), respectivamente. El problema de ajuste viene dado, en este caso, por

$$(E', E'') = \arg \min_{x, y > 0} \left(\frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{freq}}} |ER_{p_j}^{\text{exp}} - \widehat{ER}_p(x - i2\pi f_j y, s, r, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{freq}}} |ER_{p_j}^{\text{exp}}|^2}} + \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{freq}}} |IL_{p_j}^{\text{exp}} - \widehat{IL}_p(x - i2\pi f_j y, s, r, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{freq}}} |IL_{p_j}^{\text{exp}}|^2}} + \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{freq}}} |FPD_{p_j}^{\text{exp}} - \widehat{FPD}_p(x - i2\pi f_j y, s, r, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{freq}}} |FPD_{p_j}^{\text{exp}}|^2}} \right). \quad (3.76)$$

Una vez realizado el ajuste, se puede calcular el error relativo cometido en norma L_2 , para cada uno de los niveles utilizando las expresiones (3.69), (3.72) y (3.75).

Los resultados del ajuste para el modelo con placa rígida trabajando con frecuencias entre 1 y 25 kHz son los mostrados en la Figura 3.17 para los ajustes individuales (véanse las funciones objetivo (3.68), (3.71) y (3.74)) y en la Figura 3.18 para el ajuste conjunto (véase la función objetivo en (3.76)).

La Tabla 3.8 muestra en las primeras filas los valores tanto de la parte real E' como de la imaginaria E'' del módulo de Young, calculados como se indica en (3.68), (3.71) y (3.74) (para los ajustes individuales) y, en (3.76) (para el ajuste conjunto). Además, esta tabla también muestra el error relativo cometido en cada ajuste, calculado como se indica en (3.69), (3.72) y (3.75) tanto para los ajustes individuales como para el ajuste conjunto.

Como se observa en la Tabla 3.8 el error cometido en el ajuste individual a partir de los datos experimentales del nivel ER es aproximadamente del 32% y en el ajuste conjunto el error \mathcal{E}_{ER} es aproximadamente del 34%, es decir, los errores cometidos al considerar que el módulo de Young es una función lineal de la frecuencia son superiores a los cometidos considerando tanto la parte real como la parte imaginaria del módulo de Young constantes (véase la Tabla 3.7). Es por este motivo por el que se concluye que este ajuste no mejora el realizado en la sección anterior.

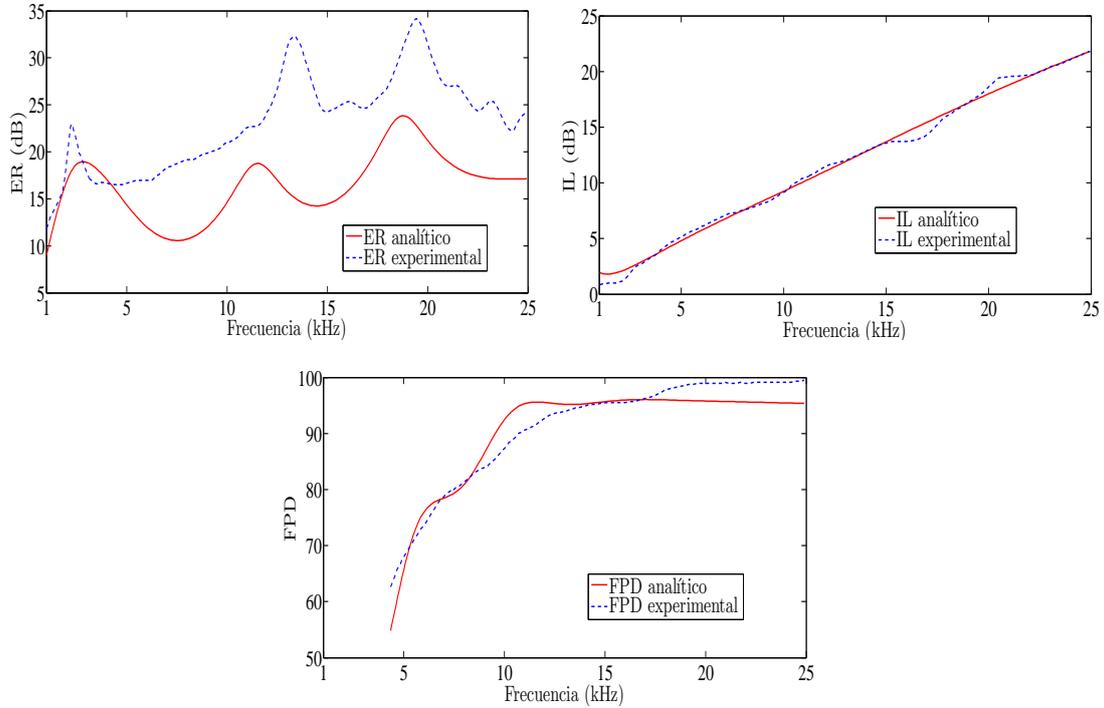


Figura 3.17: Representación gráfica con respecto a la frecuencia de los niveles ER (arriba a la izquierda), IL (arriba a la derecha) y FPD (abajo) tanto experimentales (línea azul discontinua) como numéricos (línea roja continua) utilizando las funciones objetivo (3.68), (3.71) y (3.74), en una configuración con placa, asumiendo que la parte imaginaria del módulo de Young es una función lineal de la frecuencia.

| | ER | IL | FPD | Conjunto |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| E' | 1.353×10^8 | 6.428×10^8 | 5.722×10^7 | 1.322×10^8 |
| E'' | 4.431×10^2 | 8.697×10^3 | 3.352×10^2 | 4.132×10^2 |
| \mathcal{E}_{ER} | 32.28 % | 76.42 % | 45.31 % | 34.10 % |
| \mathcal{E}_{IL} | 17.29 % | 3.39 % | 105.57 % | 16.52 % |
| \mathcal{E}_{FPD} | 97.59 % | 97.39 % | 3.32 % | 12.69 % |

Tabla 3.8: Parte real e imaginaria del módulo de Young y errores cometidos en el ajuste de los datos experimentales en la configuración con placa asumiendo que la parte imaginaria del módulo de Young es una función lineal de la frecuencia.

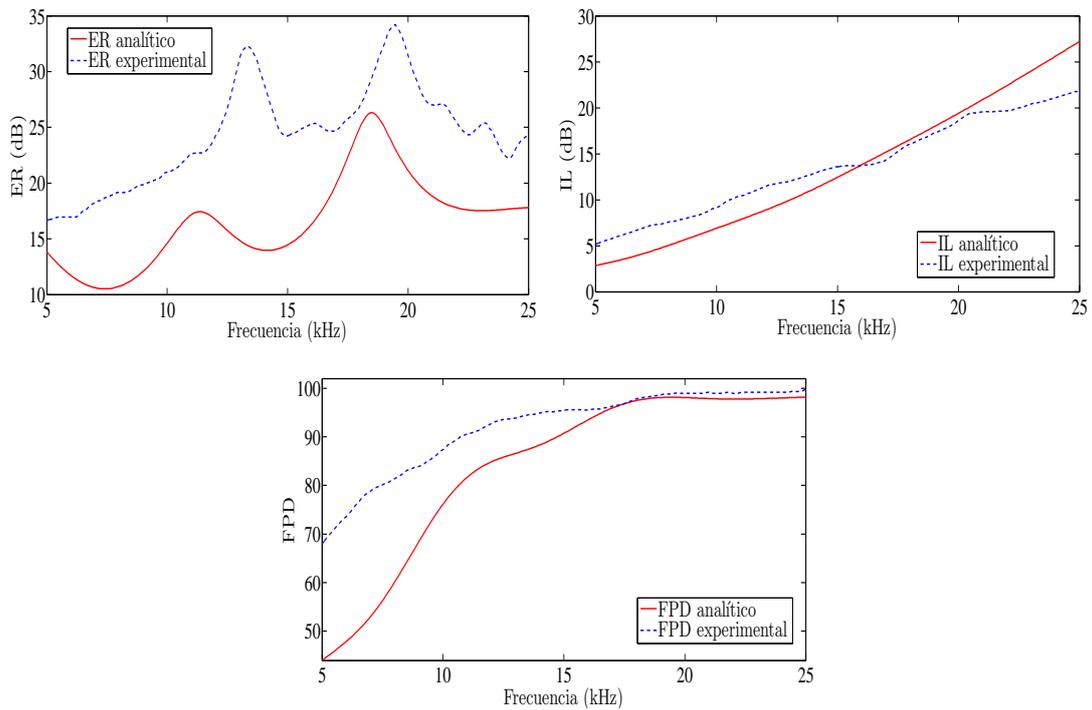


Figura 3.18: Representación gráfica con respecto a la frecuencia de los niveles ER (arriba a la izquierda), IL (arriba a la derecha) y FPD (abajo) tanto experimentales (línea azul discontinua) como numéricos (línea roja continua) utilizando la función objetivo (3.66) en una configuración con placa, asumiendo que el módulo de Young es una función lineal de la frecuencia.

3.4.2. Ajuste considerando el módulo de Young gobernado por una función arbitraria que depende de la frecuencia

A la vista de los resultados obtenidos con los modelos más simples, se ha supuesto que el módulo de Young está gobernado por una función arbitraria que depende de la frecuencia angular, es decir, en el proceso de ajuste se buscan $\widehat{E}'(\omega)$ y $\widehat{E}''(\omega)$ tal y como se indica a continuación.

Nivel de reducción de eco

Se denota por $\text{ER}_{p_j}^{\text{exp}}$ con $j = 1, \dots, N_{\text{ER}}$ a los valores experimentales obtenidos al medir la reducción de eco en la configuración con placa (obtenidos a partir de la Figura 3.2a), donde N_{ER} es el número de frecuencias de estudio. Del mismo modo, se denota por $\text{ER}_{p_j}^{\text{anl}}$ con $j = 1, \dots, N_{\text{ER}}$, a los valores analíticos calculados a partir de la solución del sistema (2.105). Se introduce, a partir del modelo, una función respuesta

$$\text{ER}_{p_j}^{\text{anl}} = \widehat{\text{ER}}_p(E_j, s, r, f_j), \quad (3.77)$$

donde $E_j = E'_j - iE''_j = \widehat{E}'(2\pi f_j) - i\widehat{E}''(2\pi f_j)$ y f_j es la frecuencia de trabajo. El problema de ajuste está descrito por

$$(E'_j, E''_j) = \arg \min_{x, y > 0} \frac{|\text{ER}_{p_j}^{\text{exp}} - \widehat{\text{ER}}_p(x - iy, s, r, f_j)|}{|\text{ER}_{p_j}^{\text{exp}}|} \quad (3.78)$$

para cada $j = 1, \dots, N_{\text{ER}}$. Una vez realizado el ajuste, se puede calcular el error relativo cometido en norma L_2 utilizando la siguiente expresión:

$$\mathcal{E}_{\text{ER}} = 100 \times \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{ER}}} |\text{ER}_{p_j}^{\text{exp}} - \widehat{\text{ER}}_p(E'_j - iE''_j, s, r, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{ER}}} |\text{ER}_{p_j}^{\text{exp}}|^2}}. \quad (3.79)$$

Nivel de pérdida por inserción

Se denota por $\text{IL}_{p_j}^{\text{exp}}$ con $j = 1, \dots, N_{\text{IL}}$ a los valores experimentales obtenidos al medir la pérdida por inserción en la configuración sin placa (obtenidos a partir de la Figura 3.2b), donde N_{IL} es el número de frecuencias de estudio. Del mismo modo, se denota por $\text{IL}_{p_j}^{\text{anl}}$ con $j = 1, \dots, N_{\text{IL}}$, a los valores analíticos calculados a partir de la solución del sistema (2.105). Se introduce, a partir del modelo, una función respuesta

$$\text{IL}_{p_j}^{\text{anl}} = \widehat{\text{IL}}_p(E_j, s, r, f_j), \quad (3.80)$$

donde el módulo de Young es $E_j = E'_j - iE''_j = \widehat{E}'(2\pi f_j) - i\widehat{E}''(2\pi f_j)$ y f_j es la frecuencia de trabajo. El problema de minimización viene dado por

$$(E'_j, E''_j) = \arg \min_{x, y > 0} \frac{|\text{IL}_{p_j}^{\text{exp}} - \widehat{\text{IL}}_p(x - iy, s, r, f_j)|}{|\text{IL}_{p_j}^{\text{exp}}|}, \quad (3.81)$$

para cada $j = 1, \dots, N_{\text{IL}}$. Realizado este ajuste, se puede calcular el error relativo cometido en norma L_2 utilizando la siguiente expresión

$$\mathcal{E}_{\text{IL}} = 100 \times \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{IL}}} |\text{IL}_{p_j}^{\text{exp}} - \widehat{\text{IL}}_{\text{p}}(E'_j - iE''_j, s, r, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{IL}}} |\text{IL}_{p_j}^{\text{exp}}|^2}}. \quad (3.82)$$

Coefficiente de disipación de potencia

Se denota por $\text{FPD}_{p_j}^{\text{exp}}$ con $j = 1, \dots, N_{\text{FPD}}$ a los valores experimentales obtenidos al medir el coeficiente de disipación de potencia en la configuración sin placa (obtenidos a partir de la Figura 3.2c), donde N_{FPD} es el número de frecuencias de estudio. Del mismo modo, se denota por $\text{FPD}_{p_j}^{\text{anl}}$ con $j = 1, \dots, N_{\text{FPD}}$, a los valores analíticos calculados a partir de la solución del sistema (2.105). Se introduce, a partir del modelo, una función respuesta

$$\text{FPD}_{p_j}^{\text{anl}} = \widehat{\text{FPD}}_{\text{p}}(E_j, s, r, f_j), \quad (3.83)$$

donde el módulo de Young es $E_j = E'_j - iE''_j = \widehat{E}'(2\pi f_j) - i\widehat{E}''(2\pi f_j)$ y f_j es la frecuencia de trabajo. El problema de ajuste viene dado por

$$(E'_j, E''_j) = \arg \min_{x, y > 0} \frac{|\text{FPD}_{p_j}^{\text{exp}} - \widehat{\text{FPD}}_{\text{p}}(x - iy, s, r, f_j)|}{|\text{FPD}_{p_j}^{\text{exp}}|}, \quad (3.84)$$

para cada $j = 1, \dots, N_{\text{FPD}}$. Realizado este ajuste, se puede calcular el error relativo cometido en norma L_2 utilizando la siguiente expresión:

$$\mathcal{E}_{\text{FPD}} = 100 \times \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{FPD}}} |\text{FPD}_{p_j}^{\text{exp}} - \widehat{\text{FPD}}_{\text{p}}(E'_j - iE''_j, s, r, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{FPD}}} |\text{FPD}_{p_j}^{\text{exp}}|^2}}. \quad (3.85)$$

Ajuste conjunto

Se denota por $\text{ER}_{p_j}^{\text{exp}}$, $\text{IL}_{p_j}^{\text{exp}}$ y $\text{FPD}_{p_j}^{\text{exp}}$ con $j = 1, \dots, N_{\text{freq}}$ a los valores experimentales obtenidos al medir el nivel de reducción de eco, la pérdida por inserción y el coeficiente de disipación de potencia, respectivamente, en la configuración sin placa (obtenidos a partir de las tres gráficas de la Figura 3.2), donde N_{freq} es el número de frecuencias de estudio en que se calculan los niveles. Se denota por $\text{ER}_{p_j}^{\text{anl}}$, $\text{IL}_{p_j}^{\text{anl}}$ y $\text{FPD}_{p_j}^{\text{anl}}$, a las funciones respuesta definidas en (3.77), (3.80) y (3.83), respectivamente. El problema de ajuste se describe por

$$(E'_j, E''_j) = \arg \min_{x, y > 0} \left(\frac{|\text{ER}_{p_j}^{\text{exp}} - \widehat{\text{ER}}_{\text{p}}(x - iy, s, r, f_j)|}{|\text{ER}_{p_j}^{\text{exp}}|} + \frac{|\text{IL}_{p_j}^{\text{exp}} - \widehat{\text{IL}}_{\text{p}}(x - iy, s, r, f_j)|}{|\text{IL}_{p_j}^{\text{exp}}|} + \frac{|\text{FPD}_{p_j}^{\text{exp}} - \widehat{\text{FPD}}_{\text{p}}(x - iy, s, r, f_j)|}{|\text{FPD}_{p_j}^{\text{exp}}|} \right), \quad (3.86)$$

| Errores | ER | IL | FPD | Conjunto |
|---------------------|---------|---------|---------|----------|
| \mathcal{E}_{ER} | 0.20 % | 61.88 % | 42.67 % | 0.95 % |
| \mathcal{E}_{IL} | 44.27 % | 1.41 % | 93.22 % | 2.25 % |
| \mathcal{E}_{FPD} | 97.58 % | 97.49 % | 0.11 % | 3.81 % |

Tabla 3.9: Errores relativos del ajuste de los datos experimentales en la configuración con placa rígida, asumiendo que el módulo de Young depende de la frecuencia.

para cada $j = 1, \dots, N_{\text{freq}}$. Una vez realizado el ajuste, se puede calcular el error relativo cometido en norma L_2 , para cada uno de los niveles utilizando las expresiones (3.79), (3.82) y (3.85).

Los resultados numéricos del ajuste para el modelo con placa rígida de acero, trabajando con frecuencias entre 1 y 25 kHz se muestran en las Figuras 3.19 para el ajuste individual y 3.20 para el ajuste conjunto. Los errores relativos cometidos en cada ajuste están mostrados en la Tabla 3.9.

En las Figuras 3.19 y 3.20 se puede observar que, aunque los errores tanto para el ajuste individual como para el ajuste conjunto son todos inferiores al 2 %, en el ajuste individual de FPD, la parte real del módulo de Young es mayor que la imaginaria. Sin embargo, es habitual que la parte real del módulo de Young sea, al menos, un orden de magnitud mayor que la parte imaginaria (véase [14]), lo cual lleva a pensar que el ajuste frecuencia a frecuencia no es lo suficientemente preciso. Además las gráficas tanto de la parte real como de la imaginaria del módulo de Young tienen muchas oscilaciones (en varios órdenes de magnitud). Como consecuencia, se realizará un nuevo ajuste, para tratar de obtener comportamientos más suaves en la respuesta en frecuencia del módulo de Young.

Ajuste con información de gradiente y hessiano

A medida que se han realizado los distintos ajustes en los cuáles las incógnitas son la parte real y la parte imaginaria del módulo de Young, se ha observado que ligeros cambios en los iterantes iniciales del algoritmo de optimización utilizados al realizar el ajuste producen resultados muy diferentes. En esta sección se ha utilizado la reescritura del sistema de propagación acústica en la configuración con placa rígida (2.105) mediante las variables δ y M , con lo que se obtiene (3.53), que ya está reescrito en función de $\delta = \text{Re}(k_p)L$ y $M = e^{\text{Im}(k_p)L}$. A partir de este nuevo sistema lineal se realiza el nuevo ajuste. A continuación se describen las funciones objetivo de estos nuevos ajustes.

Nivel de reducción de eco

Se denota por $ER_{p_j}^{\text{exp}}$ con $j = 1, \dots, N_{ER}$ a los valores experimentales obtenidos al medir la reducción de eco en la configuración con placa (obtenidos a partir de la Figura 3.2a), donde N_{ER} es el número de frecuencias de estudio. Del mismo modo, se denota por $ER_{p_j}^{\text{anl}}$ con $j = 1, \dots, N_{ER}$, a los valores analíticos calculados a partir de la

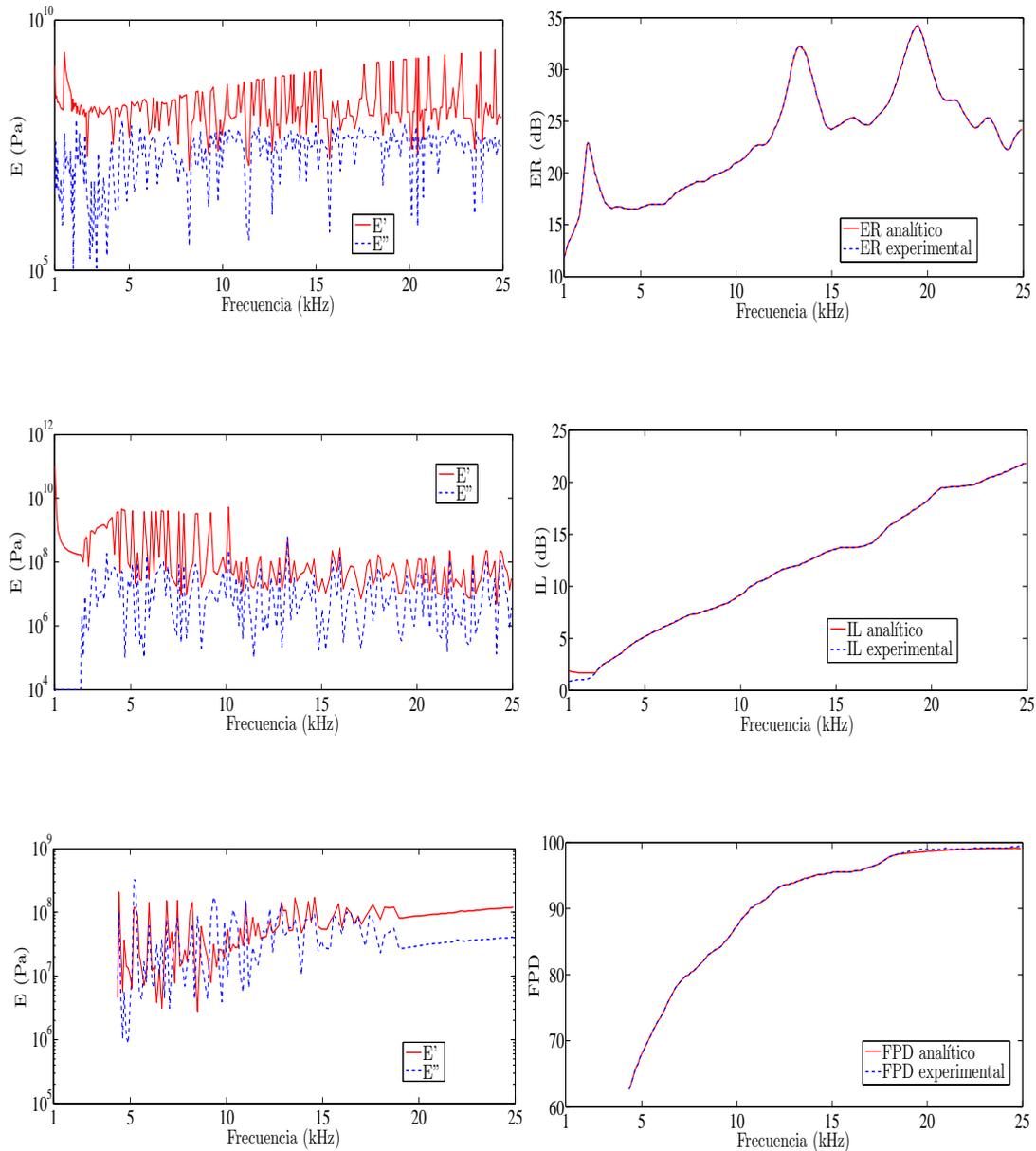


Figura 3.19: Representación gráfica con respecto a la frecuencia de los niveles ER (arriba a la derecha), IL (en medio a la derecha) y FPD (abajo a la derecha) tanto experimentales (línea azul discontinua) como numéricos (línea roja continua) utilizando las funciones objetivo (3.78), (3.81) y (3.84), en una configuración con placa, asumiendo que el módulo de Young está gobernado por una función arbitraria que depende de la frecuencia, cuya parte real y parte imaginaria se muestran en las gráficas de la izquierda.

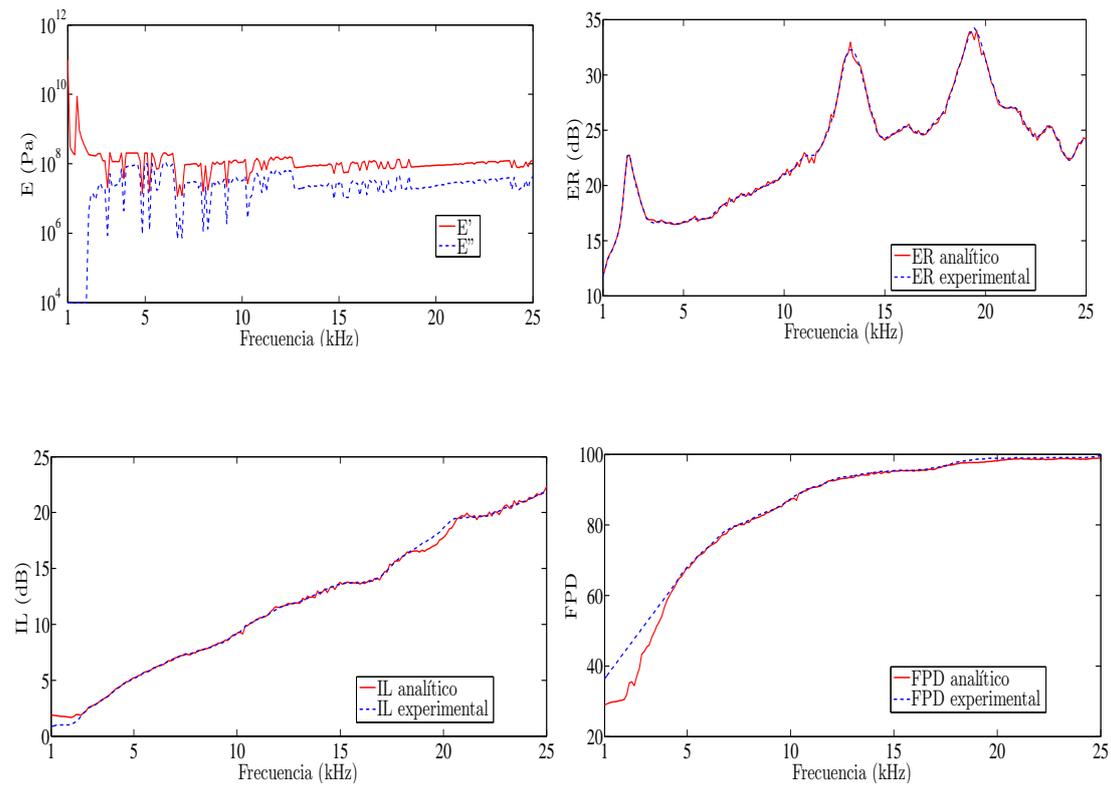


Figura 3.20: Representación gráfica con respecto a la frecuencia de los niveles ER (arriba a la derecha), IL (abajo a la izquierda) y FPD (abajo a la derecha) tanto experimentales (línea azul discontinua) como numéricos (línea roja continua) utilizando la función objetivo (3.86) en una configuración con placa, asumiendo que el módulo de Young está gobernado por una función arbitraria que depende de la frecuencia, cuya parte real y parte imaginaria se muestran en la gráfica de arriba a la izquierda.

solución del sistema (3.53). Se introduce, a partir del modelo, una función respuesta

$$\text{ER}_{p_j}^{\text{anl}} = \widehat{\text{ER}}_{p_\delta}(\delta_j, M_j, s, r, f_j),$$

donde $\delta_j = \text{Re}\left(\frac{2\pi f_j}{c_p}\right)L$, $M_j = e^{\text{Im}\left(\frac{2\pi f_j}{c_p}\right)L}$ y f_j es la frecuencia de trabajo. El problema de minimización viene dado por

$$(\delta_j, M_j) = \arg \min_{\delta, M > 0} \phi_{p_j}^{\text{ER}}(\delta, M),$$

donde

$$\phi_{p_j}^{\text{ER}}(\delta, M) = \frac{|\text{ER}_{p_j}^{\text{exp}} - \widehat{\text{ER}}_{p_\delta}(\delta, M, s, r, f_j)|}{|\text{ER}_{p_j}^{\text{exp}}|}, \quad (3.87)$$

para cada $j = 1, \dots, N_{\text{ER}}$.

Una vez realizado el ajuste, se puede calcular el error relativo cometido en norma L_2 utilizando la siguiente expresión:

$$\mathcal{E}_{\text{ER}} = 100 \times \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{ER}}} |\text{ER}_{p_j}^{\text{exp}} - \widehat{\text{ER}}_{p_\delta}(\delta_j, M_j, s, r, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{ER}}} |\text{ER}_{p_j}^{\text{exp}}|^2}}. \quad (3.88)$$

Nivel de pérdida por inserción

Se denota por $\text{IL}_{p_j}^{\text{exp}}$ con $j = 1, \dots, N_{\text{IL}}$ a los valores experimentales obtenidos al medir la pérdida por inserción en la configuración con placa (obtenidos a partir de la Figura 3.2b), donde N_{IL} es el número de frecuencias de estudio. Del mismo modo, se denota por $\text{IL}_{p_j}^{\text{anl}}$ con $j = 1, \dots, N_{\text{IL}}$, a los valores analíticos calculados a partir de la solución del sistema (3.53). Se introduce, a partir del modelo, una función respuesta

$$\text{IL}_{p_j}^{\text{anl}} = \widehat{\text{IL}}_{p_\delta}(\delta_j, M_j, s, k, f_j), \quad (3.89)$$

donde $\delta_j = \text{Re}\left(\frac{2\pi f_j}{c_p}\right)L$, $M_j = e^{\text{Im}\left(\frac{2\pi f_j}{c_p}\right)L}$ y f_j es la frecuencia de trabajo. El problema de ajuste viene dado por

$$(\delta_j, M_j) = \arg \min_{\delta, M > 0} \phi_{p_j}^{\text{IL}}(\delta, M),$$

donde

$$\phi_{p_j}^{\text{IL}}(\delta, M) = \frac{|\text{IL}_{p_j}^{\text{exp}} - \widehat{\text{IL}}_{p_\delta}(\delta, M, s, r, f_j)|}{|\text{IL}_{p_j}^{\text{exp}}|}, \quad (3.90)$$

para cada $j = 1, \dots, N_{\text{IL}}$.

Una vez realizado el ajuste, se puede calcular el error relativo cometido en norma L_2 utilizando la siguiente expresión:

$$\mathcal{E}_{\text{IL}} = 100 \times \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{IL}}} |\text{IL}_{p_j}^{\text{exp}} - \widehat{\text{IL}}_{p_\delta}(\delta_j, M_j, s, r, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{IL}}} |\text{IL}_{p_j}^{\text{exp}}|^2}}. \quad (3.91)$$

Coefficiente de disipación de potencia

Se denota por $\text{FPD}_{p_j}^{\text{exp}}$ con $j = 1, \dots, N_{\text{FPD}}$ a los valores experimentales obtenidos al medir el coeficiente de disipación de potencia en la configuración con placa (obtenidos a partir de la Figura 3.2c), donde N_{FPD} es el número de frecuencias de estudio. Del mismo modo, se denota por $\text{FPD}_{p_j}^{\text{anl}}$ con $j = 1, \dots, N_{\text{FPD}}$, a los valores analíticos calculados a partir de la solución del sistema (3.53). Se introduce, a partir del modelo, una función respuesta

$$\text{FPD}_{p_j}^{\text{anl}} = \widehat{\text{FPD}}_{p_\delta}(\delta_j, M_j, s, r, f_j), \quad (3.92)$$

donde $\delta_j = \text{Re}\left(\frac{2\pi f_j}{c_p}\right)L$, $M_j = e^{\text{Im}\left(\frac{2\pi f_j}{c_p}\right)L}$ y f_j es la frecuencia de trabajo. El problema de ajuste está descrito por

$$(\delta_j, M_j) = \arg \min_{\delta, M > 0} \phi_{p_j}^{\text{FPD}}(\delta, M),$$

donde

$$\phi_{p_j}^{\text{FPD}}(\delta, M) = \frac{|\text{FPD}_{p_j}^{\text{exp}} - \widehat{\text{FPD}}_{p_\delta}(\delta, M, s, r, f_j)|}{|\text{FPD}_{p_j}^{\text{exp}}|}, \quad (3.93)$$

para cada $j = 1, \dots, N_{\text{FPD}}$.

Realizado este ajuste, se puede calcular el error relativo cometido en norma L_2 utilizando la siguiente expresión:

$$\mathcal{E}_{\text{FPD}} = 100 \times \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{FPD}}} |\text{FPD}_{p_j}^{\text{exp}} - \widehat{\text{FPD}}_{p_\delta}(\delta_j, M_j, s, r, f_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_{\text{FPD}}} |\text{FPD}_{p_j}^{\text{exp}}|^2}}. \quad (3.94)$$

Ajuste conjunto sin ER

Al igual que en la configuración sin placa, se ha realizado un ajuste conjunto en el que se consideran solo los datos de los niveles IL y FPD. Se denota por $\text{IL}_{p_j}^{\text{exp}}$ y $\text{FPD}_{p_j}^{\text{exp}}$ con $j = 1, \dots, N_{\text{freq}}$ a los valores experimentales obtenidos al medir la pérdida por inserción y el coeficiente de disipación de potencia, respectivamente, en la configuración con placa (obtenidos a partir de las gráficas de la Figura 3.2), donde N_{freq} es el número de frecuencias de estudio en que se calculan los niveles. Se denota por $\text{IL}_{p_j}^{\text{anl}}$ y $\text{FPD}_{p_j}^{\text{anl}}$,

| Errores | ER | IL | FPD | Conjunto sin ER |
|---------------------|---------------------------|---------|---------|-----------------|
| \mathcal{E}_{ER} | $6.57 \times 10^{-10} \%$ | 95.56 % | 20.05 % | 31.54 % |
| \mathcal{E}_{IL} | 55.51 % | 1.57 % | 82.48 % | 0.29 % |
| \mathcal{E}_{FPD} | 94.24 % | 98.46 % | 1.67 % | 1.75 % |

Tabla 3.10: Errores relativos obtenidos en el ajuste de los datos experimentales en la configuración con placa rígida utilizando como variables M y δ en el problema de minimización, tanto para los ajustes individuales como para el ajuste conjunto sin tener en cuenta el nivel ER.

a las funciones respuesta descritas en (3.89) y (3.92), respectivamente. El problema de minimización viene dado por

$$(\delta_j, M_j) = \arg \min_{\delta, M > 0} \phi_{p_j}(\delta, M),$$

donde

$$\phi_{p_j}(\delta, M) = \phi_{p_j}^{IL}(\delta, M) + \phi_{p_j}^{FPD}(\delta, M), \quad (3.95)$$

para cada $j = 1, \dots, N_{\text{freq}}$. Una vez realizado el ajuste, se puede calcular el error relativo cometido en norma L_2 , para cada uno de los niveles, utilizando las expresiones (3.91) y (3.94).

Los resultados numéricos obtenidos para el modelo con placa rígida trabajando con frecuencias entre 1 y 25 kHz son los mostrados en la Figura 3.21 para cada uno de los ajustes individuales y en la Figura 3.22 para el ajuste conjunto sin ER. En la Tabla 3.10 se muestran los errores relativos cometidos en cada uno de los ajustes realizados frecuencia a frecuencia, calculados como se indica en (3.91) y (3.94), tanto para los ajustes individuales como para el ajuste conjunto sin tener en cuenta los datos experimentales del nivel ER. Como se puede observar en la Tabla 3.10, los errores cometidos en el ajuste individual de los datos experimentales de ER, IL y FPD así como en el ajuste conjunto sin considerar el nivel ER son inferiores al 2 %, por lo que se puede afirmar que el ajuste es el más preciso entre todos los realizados. Además, tanto en las gráficas del ajuste individual (véase la Figura 3.21) como en las del ajuste conjunto sin tener en cuenta el nivel ER (véase la Figura 3.22) se observa que la parte real del módulo de Young tiene al menos un orden de magnitud más que la parte imaginaria (dicha hipótesis se verifica en los materiales poliméricos, como puede verse en [9]). Del mismo modo, se observa que la monotonía tanto de E' como de E'' tiene un comportamiento similar al mostrado en [14] para los polímeros. Es por esto que los resultados obtenidos en estos últimos ajustes van a ser los utilizados en la última parte del Trabajo para realizar la simulación numérica con elementos finitos.

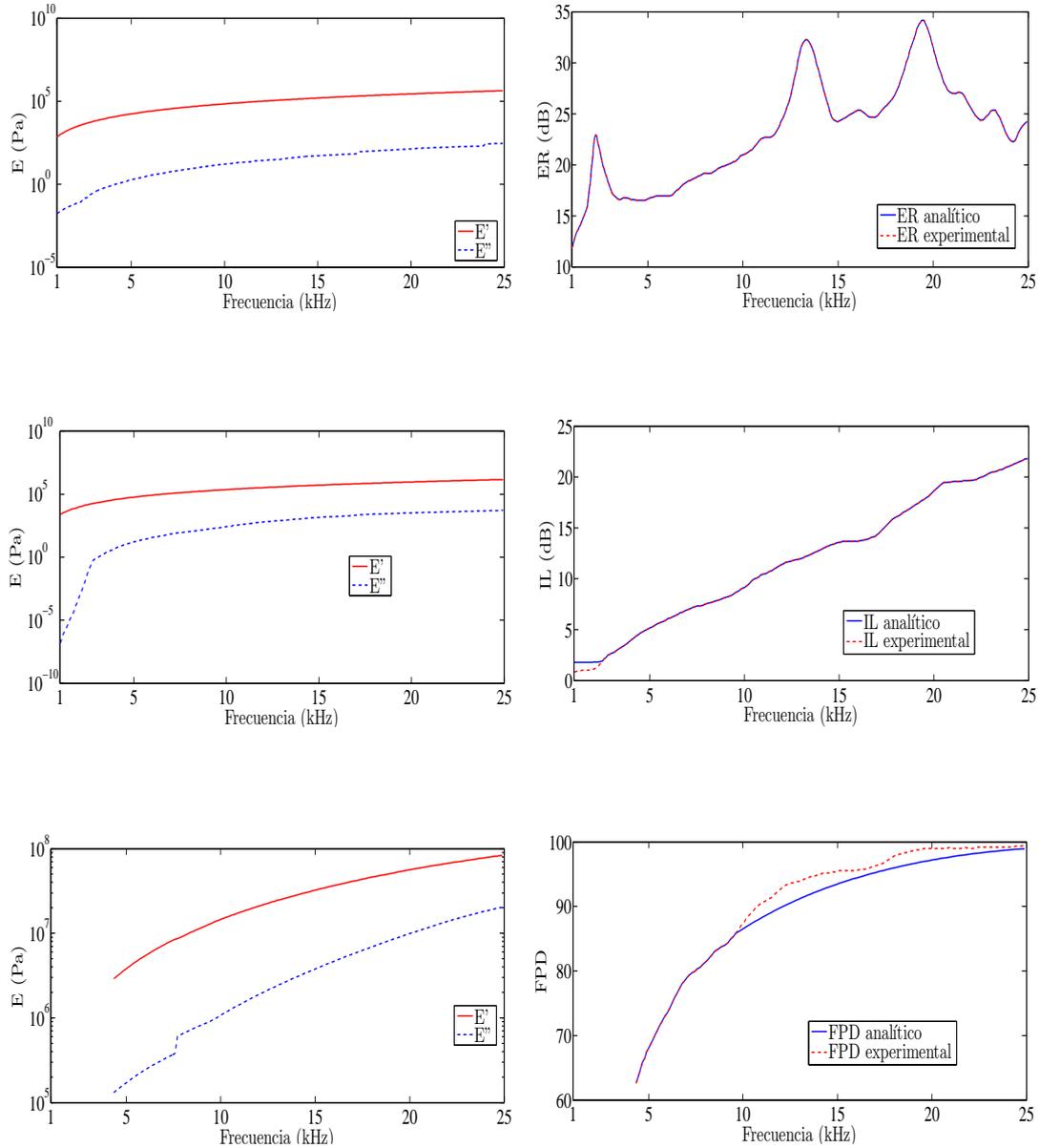


Figura 3.21: Representación gráfica, con respecto a la frecuencia, de los niveles ER (arriba derecha), IL (en medio derecha) y FPD (abajo derecha) tanto experimentales (línea azul discontinua) como numéricos (línea roja continua) utilizando las funciones objetivo (3.87), (3.90) y (3.93), en una configuración con placa. La parte real e imaginaria del módulo de Young calculados en cada ajuste se muestran en las gráficas de la izquierda.

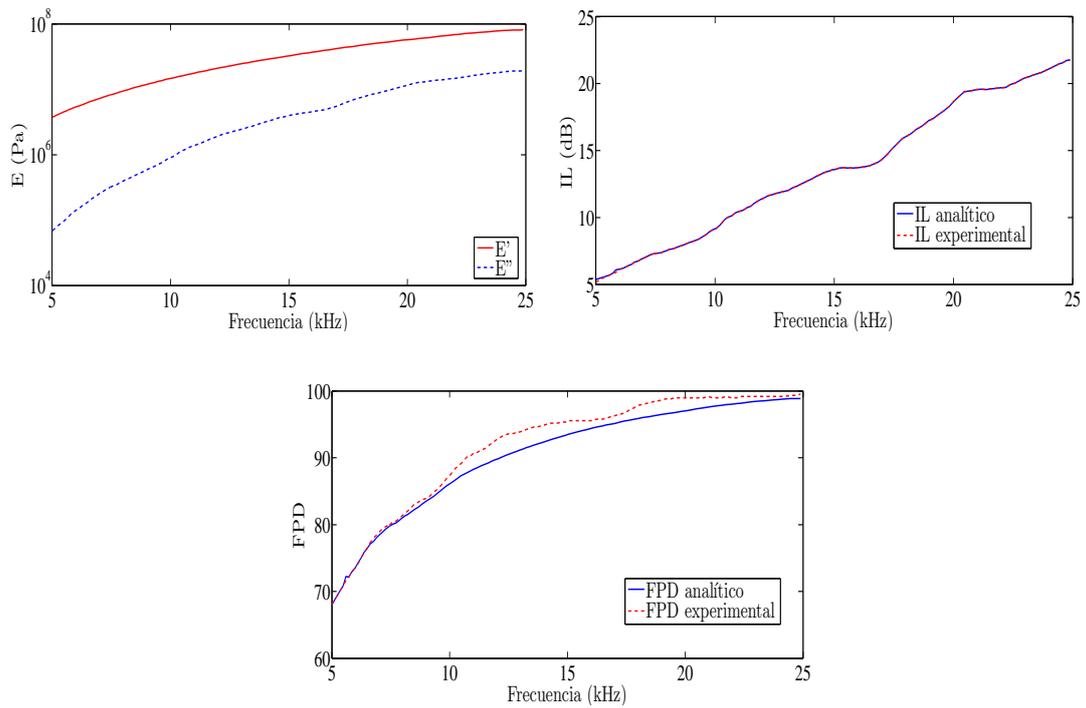


Figura 3.22: Representación gráfica, con respecto a la frecuencia, de los niveles IL (arriba a la derecha) y FPD (abajo) tanto experimentales (línea azul discontinua) como numéricos (línea roja continua) utilizando la función objetivo mostrada en (3.95) en una configuración con placa. La parte real e imaginaria del módulo de Young se muestran en la gráfica de arriba a la izquierda.

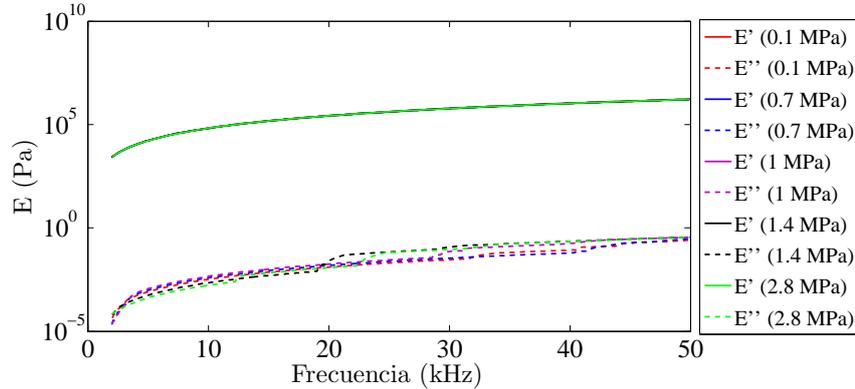


Figura 3.23: Parte real E' e imaginaria E'' del módulo de Young obtenidos a partir del ajuste con los datos experimentales del nivel ER medidos a 20°C y a distintas presiones hidrostáticas (0.1 MPa, 0.7 MPa, 1 MPa, 1.4 MPa y 2.8 MPa)

3.5. Comportamiento del módulo de Young frente a la presión hidrostática

En la hoja de especificaciones del material AptFlex SF5048 también se proporciona la respuesta en frecuencia de los niveles de reducción de eco y pérdida por inserción y del coeficiente de disipación de potencia para distintas presiones hidrostáticas, trabajando en un rango de frecuencias de 1 a 50 kHz para la configuración con placa rígida (véase Figura 3.3). Dependiendo de la presión hidrostática, se ha calculado la densidad de masa del agua en función de las distintas presiones hidrostáticas y de la temperatura, siguiendo el estándar IAPWS-95 (véase [2]). Del mismo modo, la velocidad del sonido se ha calculado a partir de la ecuación (2.4). Así, para cada valor de la presión hidrostática se ha realizado un ajuste a partir de los datos experimentales del nivel ER siguiendo el ajuste descrito en (3.87). En la Figura 3.23 se muestran la parte real e imaginaria del módulo de Young obtenida para cada una de las presiones hidrostáticas. Los errores relativos en norma L_2 cometidos utilizando la expresión del error (3.88), se muestran en la Tabla 3.11.

Por otro lado, se realiza el ajuste de IL para distintas presiones hidrostáticas siguiendo el ajuste (3.90). En la Figura 3.24 se muestran la parte real e imaginaria del módulo de Young obtenida para cada una de las presiones hidrostáticas. Los errores cometidos, utilizando la expresión del error (3.91) se muestran en la Tabla 3.11.

Como se puede observar en las Figuras 3.23 y 3.24, el módulo de Young es independiente de la presión hidrostática, lo que confirma la respuesta en frecuencia del módulo de Young obtenido en las secciones anteriores.

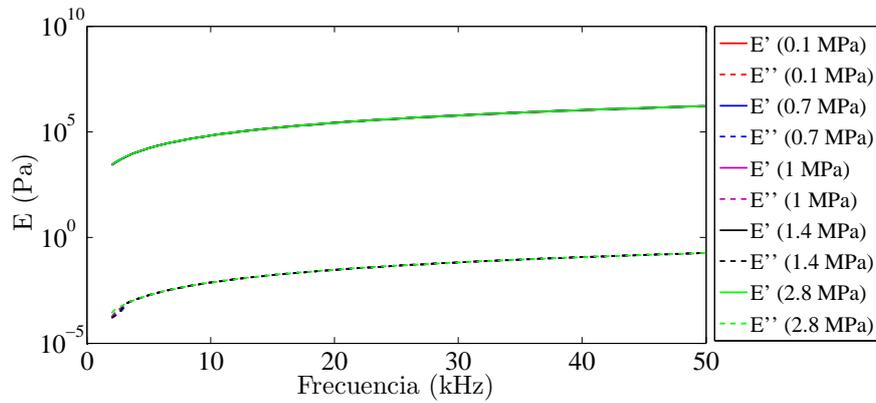


Figura 3.24: Parte real E' e imaginaria E'' del módulo de Young obtenidos a partir del ajuste con los datos experimentales del nivel IL medidos a 20°C y a distintas presiones hidrostáticas (0.1 MPa, 0.7 MPa, 1 MPa, 1.4 MPa y 2.8 MPa)

| Presión hidrostática | Ajuste ER (\mathcal{E}_{ER}) | Ajuste IL (\mathcal{E}_{IL}) |
|----------------------|---|---|
| 0.1 MPa | 0.0013 % | 7.11×10^{-5} % |
| 0.7 MPa | 0.0045 % | 9.62×10^{-5} % |
| 1 MPa | 0.011 % | 1.01×10^{-4} % |
| 1.4 MPa | 0.0015 % | 2.95×10^{-4} % |
| 2.8 MPa | 0.0029 % | 1.78×10^{-4} % |

Tabla 3.11: Errores relativos obtenidos en el ajuste de los datos experimentales del nivel ER y IL en la configuración con placa rígida utilizando como variables M y δ en el problema de ajuste, a distintas presiones hidrostáticas y a una temperatura de 20°C .

Capítulo 4

Discretización mediante elementos finitos

Para poder encontrar una solución aproximada del problema de interacción fluido-estructura se ha considerado realizar una discretización basada en un método de elementos finitos. El primer paso ha consistido en definir la formulación fuerte del problema acoplado, considerando que las ecuaciones del fluido se expresan en función de su presión y las ecuaciones de la elasticidad lineal en el sólido se expresan en función de su desplazamiento. Se ha supuesto que el dominio poligonal Ω_F donde se sitúa el fluido compresible tiene su frontera dividida en cuatro partes disjuntas: Γ_D , donde se imponen condiciones Dirichlet, Γ_N , en la que se imponen condiciones Neumann homogéneas, Γ_I , que es la frontera de contacto entre el sólido visco-elástico y el fluido y una última frontera Γ_T donde se coloca el transductor. Además, se ha supuesto que Ω_S es el dominio ocupado por el material visco-elástico. La formulación fuerte del problema que se va a estudiar es

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta\Pi - \frac{\omega^2}{c_0^2}\Pi = 0 & \text{en } \Omega_F, \\ -\omega^2\rho_S\mathbf{U}^S - \text{Div } \mathbf{C}(E(\mathbf{U}^S)) = \mathbf{0} & \text{en } \Omega_S, \\ -\Pi\mathbf{n} = \mathbf{C}(E(\mathbf{U}^S))\mathbf{n} & \text{en } \Gamma_I, \\ -\frac{1}{\rho_0\omega^2}\frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{n}} = \mathbf{U}^S \cdot \mathbf{n} & \text{en } \Gamma_I, \\ \frac{\partial\Pi}{\partial\boldsymbol{\nu}} = 0 & \text{en } \Gamma_N, \\ \Pi = 0 & \text{en } \Gamma_D, \\ \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\Pi}{\partial\boldsymbol{\nu}} = a_\nu & \text{en } \Gamma_T. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

donde \mathbf{n} es el vector normal a Γ_I y exterior al sólido (y, por tanto, interior al fluido) y $\boldsymbol{\nu}$ es el vector normal a $\Gamma_N \cup \Gamma_D \cup \Gamma_T$ y exterior al fluido. Se debe recordar que Π es el campo de presiones en el fluido, \mathbf{U}^S es el desplazamiento complejo en el sólido, $\mathbf{C}(E(\mathbf{U}^S))$ es el tensor de elasticidad del material,

$$E(\mathbf{U}^S) = \frac{\nabla\mathbf{U}^S + \nabla(\mathbf{U}^S)^t}{2}$$

es el tensor de deformaciones infinitesimales y a_ν es la aceleración normal impuesta por el movimiento del transductor.

A lo largo de este capítulo se ha utilizado la siguiente notación para los espacios de Sobolev: $L^2(\Omega)$ es el espacio de funciones de cuadrado integrable, es decir,

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : \int_{\Omega} |f(\mathbf{p})|^2 dA_{\mathbf{p}} < \infty \right\}.$$

En caso de funciones vectoriales,

$$\mathbf{L}^2(\Omega) = \left\{ \mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^2 : \int_{\Omega} |\mathbf{f}(\mathbf{p})|^2 dA_{\mathbf{p}} < \infty \right\}.$$

Además, $H^1(\Omega)$ es el espacio de funciones en $L^2(\Omega)$ cuyas derivadas (en el sentido de las distribuciones) están en $\mathbf{L}^2(\Omega)$, es decir,

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : \nabla v \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}.$$

Si Γ es una parte de la frontera de Ω , $H_{\Gamma}^1(\Omega)$ es el espacio de funciones en $H^1(\Omega)$ con traza nula en Γ , es decir,

$$H_{\Gamma}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma} = 0\}.$$

Más precisamente, en las siguientes secciones se ha trabajado con los espacios:

$$\begin{aligned} H_{\Gamma_D}^1(\Omega_F) &= \{\Pi \in H^1(\Omega) : \Pi|_{\Gamma_D} = 0\}, \\ \mathbf{H}^1(\Omega_S) &= (H^1(\Omega_S))^2. \end{aligned}$$

4.1. Formulación variacional

En lo que sigue se van a utilizar las denominadas fórmulas de Green (véase [5]). Sea \mathcal{R} una región regular (una región cerrada, cuya frontera $\partial\mathcal{R}$ es regular a trozos) y V espacio vectorial real. Sean $\varphi, \psi : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u, v : \mathcal{R} \rightarrow V$ y $S : \mathcal{R} \rightarrow \text{Lin}$ campos regulares. Si φ es de clase $\mathcal{C}^2(\mathcal{R})$ se verifica:

$$\int_{\partial\mathcal{R}} \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} \psi dl_{\mathbf{p}} = \int_{\mathcal{R}} \nabla\varphi \cdot \nabla\psi dA_{\mathbf{p}} + \int_{\mathcal{R}} \Delta\varphi \psi dA_{\mathbf{p}}, \quad (4.2)$$

$$\int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \psi dl_{\mathbf{p}} = \int_{\mathcal{R}} \text{div} \mathbf{u} \psi dA_{\mathbf{p}} + \int_{\mathcal{R}} \mathbf{u} \cdot \nabla\psi dA_{\mathbf{p}}. \quad (4.3)$$

Para obtener la formulación variacional en la parte fluida, se multiplica la primera ecuación de (4.1) por el conjugado de una función test Q que se anule en Γ_D y se integra en Ω_F , obteniendo

$$- \int_{\Omega_F} \Delta\Pi \bar{Q} dA_{\mathbf{p}} - \int_{\Omega_F} \frac{\omega^2}{c_0^2} \Pi \bar{Q} dA_{\mathbf{p}} = 0.$$

Utilizando la fórmula de Green (4.2) y teniendo en cuenta las ecuaciones cuarta, quinta, sexta y séptima de (4.1), obtenemos

$$\int_{\Omega_F} \nabla \Pi \cdot \nabla \bar{Q} \, dA_{\mathbf{p}} - \frac{\omega^2}{c_0^2} \int_{\Omega_F} \Pi \bar{Q} \, dA_{\mathbf{p}} - \rho_0 \omega^2 \int_{\Gamma_I} \mathbf{U}^S \cdot \mathbf{n} \bar{Q} \, dl_{\mathbf{p}} - \rho_0 \int_{\Gamma_T} a_\nu \bar{Q} \, dl_{\mathbf{p}} = 0, \quad (4.4)$$

donde se ha supuesto que ρ_0 , c_0 son constantes en Ω_F .

En cuanto a la formulación variacional de la parte sólida, multiplicando escalarmente la segunda ecuación de (4.1) por el conjugado de una función test $\bar{\mathbf{W}}^S$ e integrando en Ω_S , se obtiene

$$- \int_{\Omega_S} \omega^2 \rho_S \mathbf{U}^S \cdot \bar{\mathbf{W}}^S \, dA_{\mathbf{p}} - \int_{\Omega_S} \text{Div } \mathbf{C}(E(\mathbf{U}^S)) \cdot \bar{\mathbf{W}}^S \, dA_{\mathbf{p}} = 0.$$

Utilizando la fórmula de Green (4.3) y teniendo en cuenta la tercera ecuación de (4.1) obtenemos

$$- \omega^2 \rho_S \int_{\Omega_S} \mathbf{U}^S \cdot \bar{\mathbf{W}}^S \, dA_{\mathbf{p}} + \int_{\Omega_S} \mathbf{C}(E(\mathbf{U}^S)) \cdot E(\bar{\mathbf{W}}^S) \, dA_{\mathbf{p}} + \int_{\Gamma_I} \Pi \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{W}}^S \, dl_{\mathbf{p}} = 0, \quad (4.5)$$

donde se ha supuesto que ρ_S es constante en Ω_S .

Ahora sumando (4.4) y (4.5) se obtiene la formulación variacional del problema tomando espacios funcionales adecuados de tal forma que todos los términos de (4.4) y (4.5) estén bien definidos:

Dado $\omega > 0$ y una aceleración normal $a_\nu \in L^2(\Gamma_T)$ ¹, encontrar $(\Pi, \mathbf{U}^S) \in \mathbf{V}^\Pi$, tal que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_F} \nabla \Pi \cdot \nabla \bar{Q} \, dA_{\mathbf{p}} + \int_{\Omega_S} \mathbf{C}(E(\mathbf{U}^S)) \cdot E(\bar{\mathbf{W}}^S) \, dA_{\mathbf{p}} - \frac{\omega^2}{c_0^2} \int_{\Omega_F} \Pi \bar{Q} \, dA_{\mathbf{p}} \\ & - \omega^2 \rho_S \int_{\Omega_S} \mathbf{U}^S \cdot \bar{\mathbf{W}}^S \, dA_{\mathbf{p}} - \rho_0 \omega^2 \int_{\Gamma_I} \mathbf{U}^S \cdot \mathbf{n} \bar{Q} \, dl_{\mathbf{p}} + \rho_0 \int_{\Gamma_T} a_\nu \bar{Q} \, dl_{\mathbf{p}} \\ & - \int_{\Gamma_I} \Pi \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{W}}^S \, dl_{\mathbf{p}} = 0, \quad \forall (Q, \mathbf{W}^S) \in \mathbf{V}^\Pi \end{aligned}$$

donde $\mathbf{V}^\Pi = H_{\Gamma_D}^1(\Omega_F) \times \mathbf{H}^1(\Omega_S)$.

4.2. Discretización por elementos finitos

Sea \mathcal{T}_h una triangulación del dominio computacional $\Omega_F \cup \Omega_S$. Sea $\mathcal{P}_2(T)$ el espacio de polinomios cuadráticos a trozos en dos variables sobre un triángulo $T \in \mathcal{T}_h$. En cada triángulo $T \in \mathcal{T}_h$, se han considerado como nodos tanto los vértices de los triángulos

¹Aunque es suficiente con imponer que $a_\nu \in L^2(\Gamma_T)$, se podría imponer que $a_\nu \in H^{-1/2}(\Gamma_T)$

como los puntos medios de las aristas. Se va a considerar la base de Lagrange para el espacio vectorial $\mathcal{P}_2(T)$. Las funciones $p \in \mathcal{P}_2(T)$ son funciones de la forma $p(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2$. Se ha denotado por (x_j, y_j) , $j = 1, \dots, 6$, las coordenadas de los nodos de un triángulo cualquiera $T \in \mathcal{T}_h$. Se denota por \mathbf{q}_j , $j = 1, 2, 3$ a los tres vértices del triángulo $T \in \mathcal{T}_h$ y \mathbf{q}_j , $j = 4, 5, 6$ a los tres puntos medios de las aristas de dicho triángulo. Se puede transformar cualquier triángulo $T \in \mathcal{T}_h$ en el triángulo de referencia \hat{T} (con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$) mediante la transformación afín, que preserva la numeración de los vértices,

$$\begin{aligned} F_T : \hat{T} &\longrightarrow T \\ (\xi, \eta) &\longrightarrow (x, y) \end{aligned}$$

$$F_T \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \mathbf{q}_1,$$

donde ξ y η son las coordenadas de los nodos del triángulo de referencia. Por tanto, los nodos en \hat{T} son $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1/2, 0)$, $(1/2, 1/2)$ y $(0, 1/2)$. La base asociada al espacio está formada por seis funciones N_i que verifican $N_i(\mathbf{q}_j) = \delta_{ij}$ con $i, j = 1, \dots, 6$. De esta forma, las funciones de base en el triángulo de referencia \hat{T} son

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= 1 - 3\xi - 3\eta + 2\xi^2 + 4\xi\eta + 2\eta^2, \\ N_2(\xi, \eta) &= -\xi + 2\xi^2, \\ N_3(\xi, \eta) &= -\eta + 2\eta^2, \\ N_4(\xi, \eta) &= 4\xi - 4\xi^2 - 4\xi\eta, \\ N_5(\xi, \eta) &= 4\xi\eta, \\ N_6(\xi, \eta) &= 4\eta - 4\xi\eta - 4\eta^2. \end{aligned}$$

Las funciones de base se muestran en la Figura 4.1.

Se aproxima la presión en el fluido y cada componente del desplazamiento en el sólido utilizando elementos Lagrange \mathcal{P}_2 , esto es,

$$\begin{aligned} L_{h, \Gamma_D}(\Omega_F) &:= \{q \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega_F) : q|_T \in \mathcal{P}_2(T) \forall T \in \mathcal{T}_h, T \subset \Omega_F\}, \\ \mathbf{L}_h(\Omega_S) &:= \{\mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S) : \mathbf{w}|_T \in \mathcal{P}_2(T) \forall T \in \mathcal{T}_h, T \subset \Omega_S\}, \end{aligned}$$

donde $L_{h, \Gamma_D}(\Omega_F) = \langle Q_1, Q_2, \dots, Q_{N_F} \rangle$ y $\mathbf{L}_h(\Omega_S) = \langle \mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots, \mathbf{W}_{N_S} \rangle$. Por lo tanto, el espacio variacional \mathbf{V}^{Π} será reemplazado en el problema discreto por

$$\mathbf{V}_h^{\Pi} = L_{h, \Gamma_D}(\Omega_F) \times \mathbf{L}_h(\Omega_S).$$

De esta forma, se puede escribir entonces la aproximación discreta del problema variacional: Encontrar $(\Pi_h, \mathbf{U}_h^S) \in \mathbf{V}_h^{\Pi}$, tal que

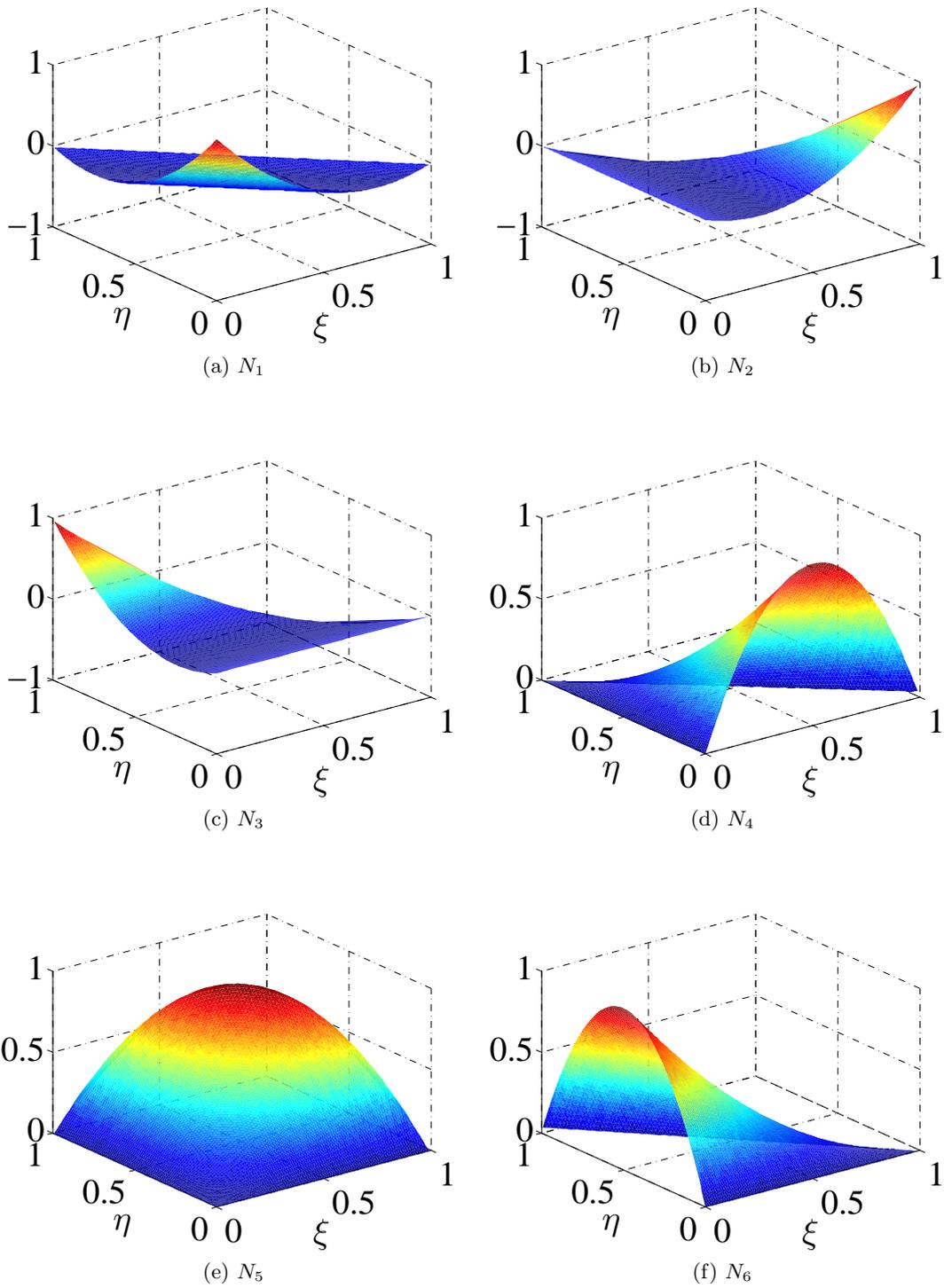


Figura 4.1: Funciones de base respecto al triángulo de referencia para los elementos triangulares cuadráticos.

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_F} \nabla \Pi_h \cdot \nabla \bar{Q}_h \, dA_{\mathbf{p}} + \int_{\Omega_S} \mathbf{C}(E(\mathbf{U}_h^S)) \cdot E(\bar{\mathbf{W}}_h^S) \, dA_{\mathbf{p}} - \frac{\omega^2}{c_0^2} \int_{\Omega_F} \Pi_h \bar{Q}_h \, dA_{\mathbf{p}} \\
& - \omega^2 \rho_S \int_{\Omega_S} \mathbf{U}_h^S \cdot \bar{\mathbf{W}}_h^S \, dA_{\mathbf{p}} - \rho_0 \omega^2 \int_{\Gamma_I} \mathbf{U}_h^S \cdot \mathbf{n} \bar{Q}_h \, dl_{\mathbf{p}} + \rho_0 \int_{\Gamma_T} a_\nu \bar{Q}_h \, dl_{\mathbf{p}} \\
& - \int_{\Gamma_I} \Pi_h \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{W}}_h^S \, dl_{\mathbf{p}} = 0, \quad \forall (Q_h, \mathbf{W}_h^S) \in \mathbf{V}_h^\Pi.
\end{aligned}$$

Se puede escribir ahora la formulación matricial

$$\left(\begin{pmatrix} K_F & 0 \\ C^* & K_S \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} M_F & \rho_0 C \\ 0 & M_S \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \Pi_h \\ \mathbf{U}_h^S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_T \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned}
(K_F)_{ij} &= \int_{\Omega_F} \nabla Q_j \cdot \nabla \bar{Q}_i \, dA_{\mathbf{p}} \quad i, j = 1, 2, \dots, N_F, \\
(K_S)_{ij} &= \int_{\Omega_S} \mathbf{C}(E(\mathbf{W}_i)) \cdot E(\bar{\mathbf{W}}_j) \, dA_{\mathbf{p}} \quad i, j = 1, 2, \dots, N_S, \\
(M_F)_{ij} &= \int_{\Omega_F} \frac{1}{c_0^2} Q_j \bar{Q}_i \, dA_{\mathbf{p}} \quad i, j = 1, 2, \dots, N_F, \\
(M_S)_{ij} &= \int_{\Omega_S} \rho_S \mathbf{W}_i \cdot \bar{\mathbf{W}}_j \, dA_{\mathbf{p}} \quad i, j = 1, 2, \dots, N_S, \\
(C)_{ij} &= \int_{\Gamma_I} \mathbf{W}_i \cdot \mathbf{n} \bar{Q}_j \, dl_{\mathbf{p}} \quad i = 1, 2, \dots, N_S, \quad j = 1, 2, \dots, N_F, \\
(G_T)_j &= - \int_{\Gamma_T} \rho_0 a_\nu \bar{Q}_j \, dl_{\mathbf{p}} \quad j = 1, \dots, N_F,
\end{aligned}$$

donde $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_{N_F}\}$ es una base de $L_{h, \Gamma_D}(\Omega_F)$ y $\{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots, \mathbf{W}_{N_S}\}$ es una base de $\mathbf{L}_h(\Omega_S)$. Para cada triángulo $T \in \mathcal{T}_h$, las funciones de base Q_j , para $j = 1, \dots, N_F$, se definen como

$$Q_j|_T = N_l \circ F_T^{-1},$$

donde l es el grado de libertad local que tiene asociado el índice j en la numeración global. Además, para cada triángulo $T \in \mathcal{T}_h$ las funciones de base \mathbf{W}_j , para $j = 1, \dots, N_S$, se definen como

$$\mathbf{W}_j|_T \cdot \mathbf{e}_i = N_l \circ F_T^{-1}, \quad \text{para } i = 1, 2,$$

donde l es el grado de libertad local que tiene asociado el índice j en la numeración global.

Capítulo 5

Resultados numéricos

Una vez que el módulo de Young complejo y el coeficiente de Poisson han sido hallados a partir del comportamiento acústico experimental del material AptFlex SF5048, se ha realizado la implementación del método de elementos finitos utilizando el software COMSOL Multiphysics [1]. Las simulaciones numéricas se han realizado bajo las mismas condiciones y con las mismas configuraciones geométricas utilizadas en los ensayos experimentales llevados a cabo por el Grupo de investigación en Metrología Óptica de la Universidad de Vigo. En todas las configuraciones se ha considerado un tanque de inmersión lleno de agua dulce y, dentro de él, una o varias planchas de material AptFlex SF5048. Para ajustar los resultados numéricos a los datos experimentales se ha modelizado el equipo de generación de ultrasonidos (transductor) mediante una curva de respuesta en frecuencia.

5.1. Configuraciones geométricas

Se han estudiado tres configuraciones diferentes proporcionadas por el Grupo de investigación en Metrología Óptica. En las tres se trabaja con un tanque de metacrilato lleno de agua dulce con medidas interiores de 670 mm de largo, 275 mm de ancho y 600 mm de alto. En él se ha instalado un equipo de generación de ultrasonidos y un hidrófono para medir la presión acústica en distintos puntos del tanque. Como ya se ha analizado en el Capítulo 3, los datos de la plancha de polímero AptFlex SF5048 se han obtenido a partir de su hoja de especificaciones [3]. Dicha placa tiene dimensiones de 600 mm \times 600 mm \times 50 mm y una densidad de masa $\rho_s = 2100 \text{ kg/m}^3$. Para calcular cuál es la velocidad del sonido en la plancha de polímero se ha utilizado el coeficiente de Poisson $\nu = 0.48$, siguiendo la caracterización acústica para polímeros propuesta en [14]. Por el contrario, se han usado la parte real e imaginaria del módulo de Young dependientes de la frecuencia obtenidas con los ajustes propuestos en el Capítulo 3. Más precisamente, se ha utilizado el módulo de Young obtenido en el ajuste utilizando la información del gradiente y hessiano (véanse las Secciones 3.2.4 y 3.4.2). Los datos utilizados para el agua son $\rho_0 = 998 \text{ kg/m}^3$ y $c_0 = 1480 \text{ m/s}$ calculados siguiendo el procedimiento explicado en el Capítulo 2 para calcular tanto la densidad de masa como la velocidad de propagación a partir de la temperatura $\theta = 20^\circ\text{C}$ y de la presión hidrostática $\pi_0 = 101325 \text{ Pa}$ (véase la Sección 2.1.1 para más detalles).

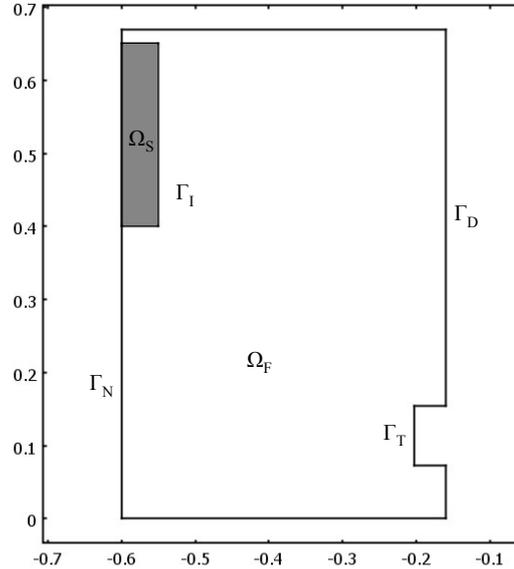


Figura 5.1: Configuración geométrica MP en la que el transductor está situado frente a la pared del tanque (la plancha de material absorbente está resaltada en gris).

A continuación se muestran las tres configuraciones en las que se ha realizado la simulación numérica. La primera configuración (etiquetada como MP) es la mostrada en la Figura 5.1, en la cuál se observa que frente al transductor (cuya cara activa está situada en Γ_T) se encuentra la pared del tanque. Se considera, tanto en esta figura como en las del resto del capítulo, que el fondo del tanque se corresponde con la frontera de la parte izquierda del dominio computacional y el nivel del agua con la frontera de la parte derecha del dominio.

La segunda configuración (etiquetada como MA) es la mostrada en la Figura 5.2, en la cual se coloca una plancha de material absorbente horizontal en el fondo del tanque y centrado sobre el eje longitudinal del transductor.

En la tercera configuración experimental (etiquetada como MB), se busca disminuir los efectos de reverberación en el tanque. Para ello se disponen cuatro planchas de material absorbente, tres de ellas en el fondo del tanque en configuración “trampa” y una cuarta en la superficie del agua, cerca del transductor, dispuesta a modo de apantallamiento acústico (véase la Figura 5.3).

5.2. Simulaciones numéricas mono-frecuenciales

De forma análoga a lo hecho en el Capítulo 3, se han realizado dos tipos de simulaciones numéricas. En el primer conjunto de simulaciones se ha utilizado la parte real y la parte imaginaria del módulo de Young obtenida para el ajuste de los datos experimentales ER y un segundo tipo en el que se ha utilizado la parte real y la parte imaginaria

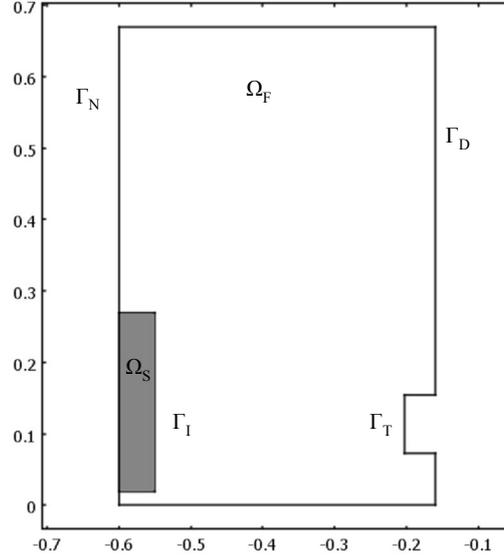


Figura 5.2: Configuración geométrica MA en la que el transductor está situado frente a una plancha de material absorbente (la plancha de material absorbente está resaltada en gris).

del módulo de Young obtenida en el ajuste conjunto de los valores experimentales de los niveles IL y FPD. En la Tabla 5.1 se muestran los valores de la parte real y la parte imaginaria obtenidos a una frecuencia de 20 kHz, para ambos ajustes. Dichos valores son los que se han utilizado en las simulaciones numéricas mediante elementos finitos.

| | ER | IL y FPD |
|------------|---------------------|---------------------|
| E' [Pa] | 2.747×10^5 | 5.715×10^7 |
| E'' [Pa] | 1.337×10^2 | 1.154×10^7 |

Tabla 5.1: Valores de la parte real E' y la parte imaginaria E'' del módulo de Young obtenidos mediante el ajuste de los datos experimentales de ER y el ajuste conjunto de los datos experimentales IL y FPD a una frecuencia de 20 kHz.

A la hora de realizar el mallado se ha construido una malla que satisface diferentes requisitos en la parte fluida y sólida. En el caso del fluido, la malla posee como tamaño máximo 4.625×10^{-3} m, para preservar al menos 16 elementos por longitud de onda, es decir

$$\frac{\lambda}{16} = \frac{c_0}{16f} = \frac{1480}{16 \times 20000} = 4.625 \times 10^{-3} \text{ m.}$$

En el caso del sólido visco-elástico, para garantizar 16 elementos por cada oscilación de una onda plana longitudinal, con velocidad de propagación compleja c_p se obtiene que

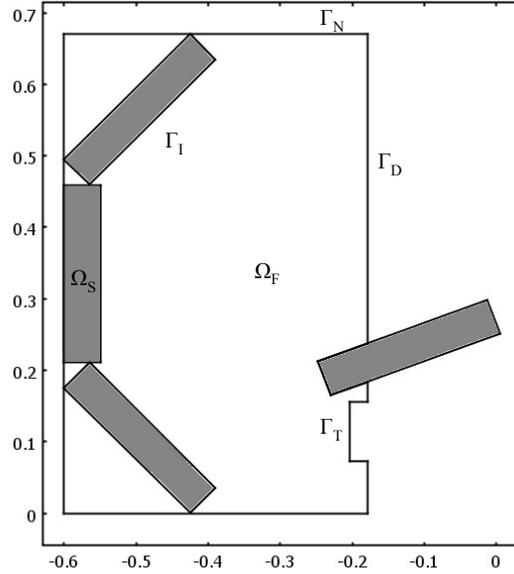


Figura 5.3: Configuración geométrica MB en el que el transductor está rodeado de una “trampa” acústica formada por tres planchas de material absorbente en el fondo del tanque y una plancha próxima al transductor (las planchas de material absorbente están resaltadas en gris).

el tamaño máximo de la malla es

$$\frac{\text{Re}(\lambda)}{16} = \frac{\text{Re}(c_p)}{16f} = 1.059 \times 10^{-4} \text{ m},$$

en el caso de las simulaciones numéricas con los datos obtenidos para el ajuste de los valores de ER, mientras que en el caso de aquellas que utilizan los valores de E' y E'' obtenidos a partir del ajuste conjunto de los valores de IL y FPD, resulta

$$\frac{\text{Re}(\lambda)}{16} = \frac{\text{Re}(c_p)}{16f} = 1.528 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

En las Figuras 5.4, 5.5 y 5.6 se muestra en detalle algunas partes de las mallas. En todas ellas se puede apreciar como la malla es no uniforme y que, a pesar de los distintos tamaños máximos de malla en Ω_F y Ω_S , la malla es conforme en la frontera de acople Γ_I entre el dominio fluido y el sólido visco-elástico.

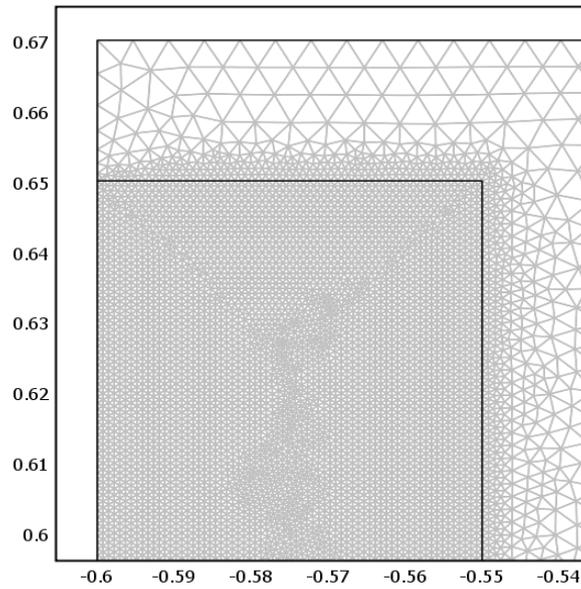


Figura 5.4: Detalle del mallado de la parte superior de la plancha absorbente en la configuración geométrica MP.

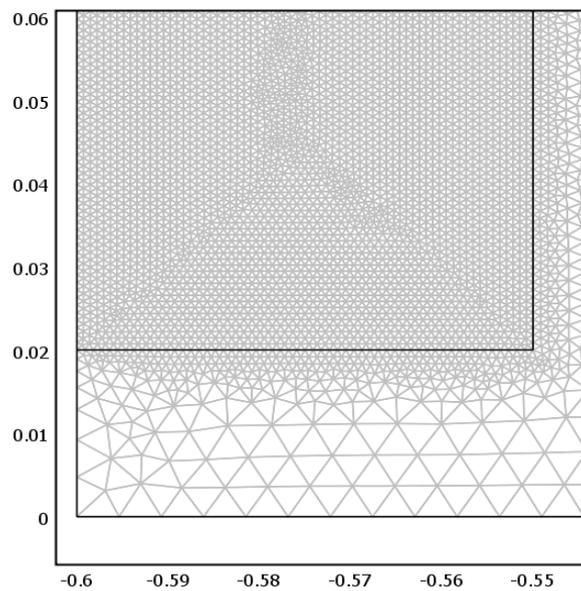


Figura 5.5: Detalle del mallado de la parte inferior de la plancha absorbente en la configuración geométrica MA.

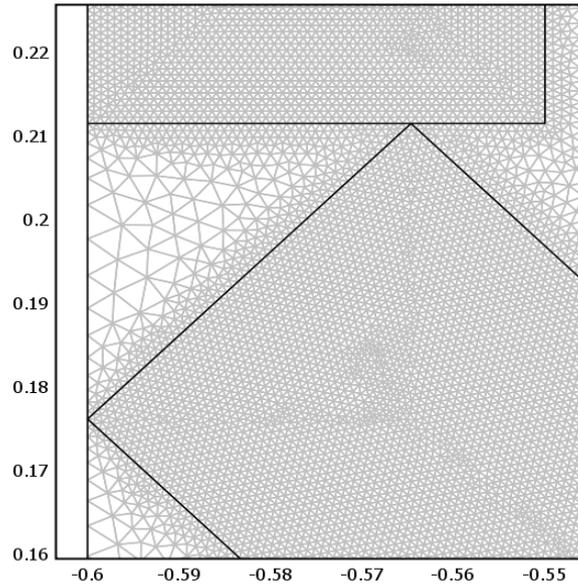


Figura 5.6: Detalle del mallado de un punto de contacto entre entre dos planchas de material absorbente en la tercera configuración geométrica MB.

5.2.1. Resultados numéricos con la configuración MP

La primera configuración a estudiar es la que hemos denominado configuración MP (véase la Figura 5.1) en la que el transductor se encuentra frente a la pared del tanque. En la Figura 5.7 se muestra la norma L_2 del desplazamiento producido en el sólido visco-elástico y la parte real de la presión en el fluido, usando el módulo de Young obtenido a partir del ajuste de los datos experimentales de ER (véanse los valores en la Tabla 5.1).

De forma análoga, pero considerando el módulo de Young obtenido en el ajuste conjunto de los valores experimentales de IL y FPD (véanse los valores en la Tabla 5.1) se han obtenido la norma L_2 del desplazamiento producido en el sólido visco-elástico y la parte real de la presión en el fluido, mostrados en la Figura 5.8.

5.2.2. Resultados numéricos con la configuración MA

La siguiente configuración a estudiar es la denominada configuración MA (véase la Figura 5.2) en la cual se coloca un absorbente horizontal en el fondo del tanque centrado en el eje acústico. En la Figura 5.9 se muestra la norma L_2 del desplazamiento producido en el sólido visco-elástico y la parte real de la presión en el fluido, para el módulo de Young obtenido en el ajuste de los valores de ER (véanse los valores en la Tabla 5.1).

Si se procede de la misma forma, pero utilizando el módulo de Young obtenido en el ajuste conjunto de los valores experimentales de IL y FPD (véanse los valores en la Tabla 5.1), se obtienen los resultados mostrados en la Figura 5.8 para la norma L_2 del desplazamiento producido en el sólido visco-elástico y la parte real de la presión en el

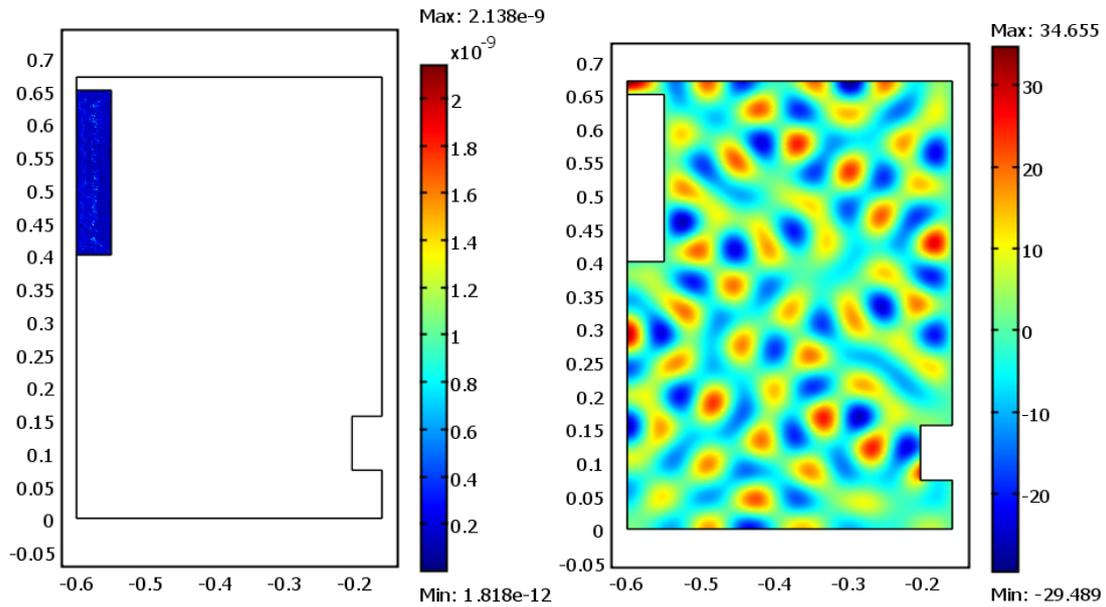


Figura 5.7: Módulo del vector desplazamiento [m] en el sólido visco-elástico (izquierda) y parte real de la presión [Pa] en el fluido (derecha) para la configuración MP.

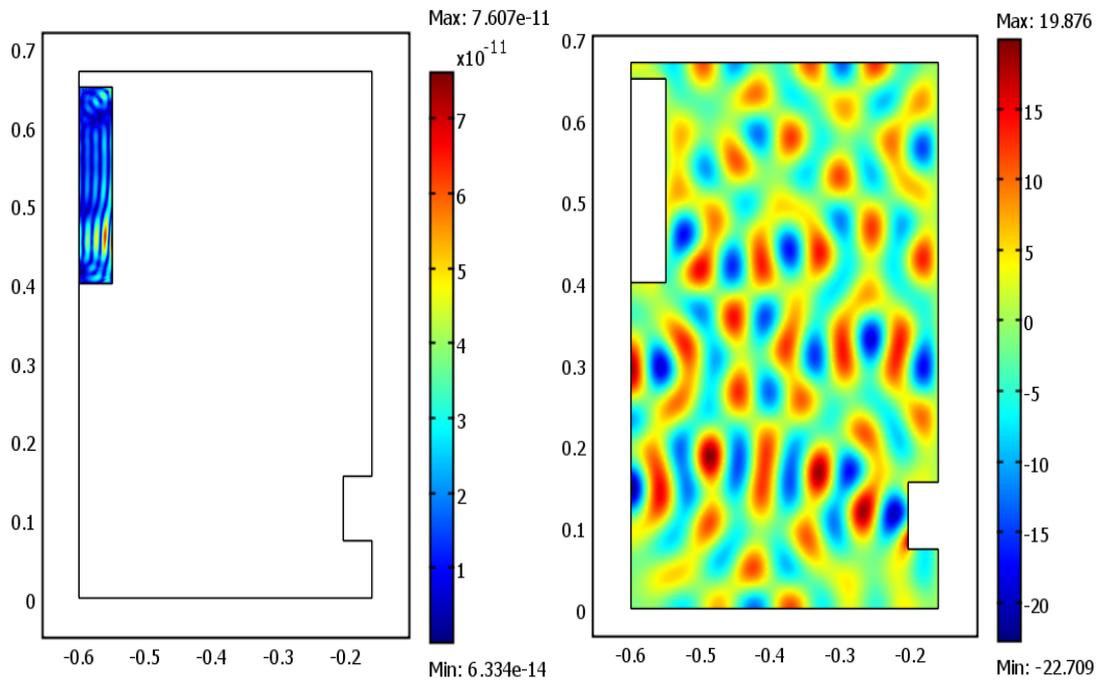


Figura 5.8: Módulo del vector desplazamiento [m] en el sólido visco-elástico (izquierda) y parte real de la presión [Pa] en el fluido (derecha) para la configuración MP.

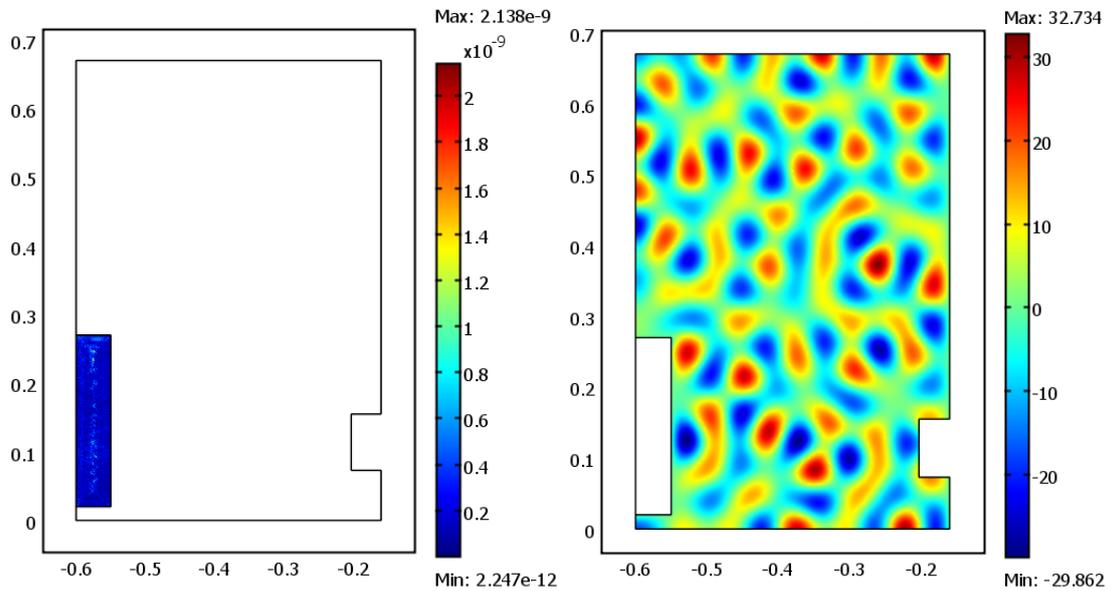


Figura 5.9: Módulo del vector desplazamiento [m] en el sólido visco-elástico (izquierda) y parte real de la presión [Pa] en el fluido (derecha) para la configuración MA.

fluido.

5.2.3. Resultados numéricos con la configuración MB

Por último, se ha realizado la simulación numérica con la configuración MB en la que se disponen cuatro placas de absorbente tres de ellas en el fondo del tanque en configuración “trampa” y una cuarta en la superficie del agua dispuesta a modo de apantallamiento acústico (véase la Figura 5.3). En la Figura 5.11 se muestra la norma L_2 del desplazamiento producido en el sólido visco-elástico y la parte real de la presión en el fluido, usando el módulo de Young obtenido en el ajuste de los valores de ER (véase Tabla 5.1).

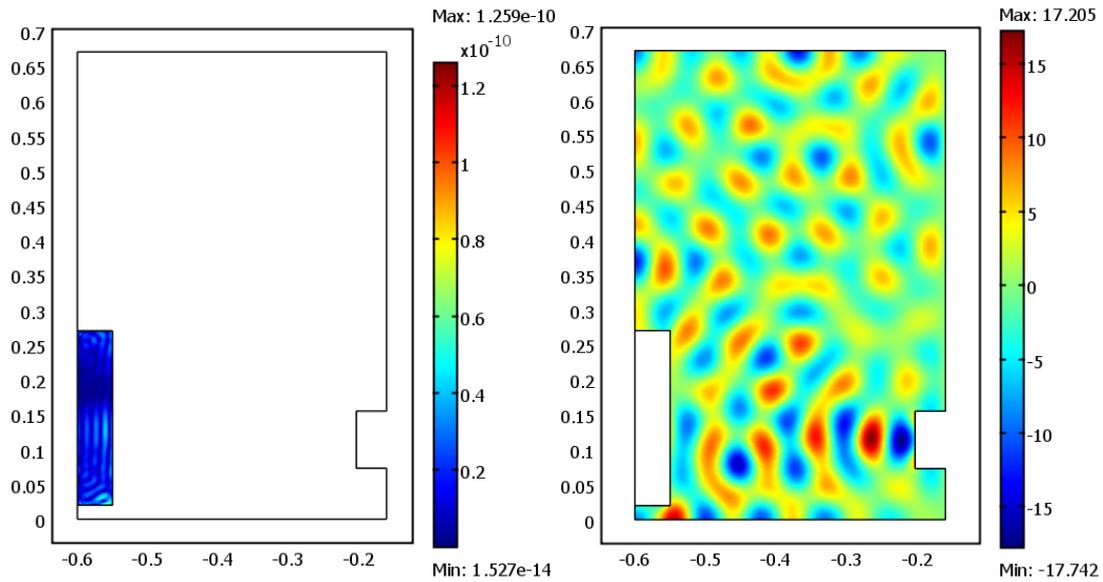


Figura 5.10: Módulo del vector desplazamiento [m] en el sólido visco-elástico (izquierda) y parte real de la presión [Pa] en el fluido (derecha) para la configuración MA.

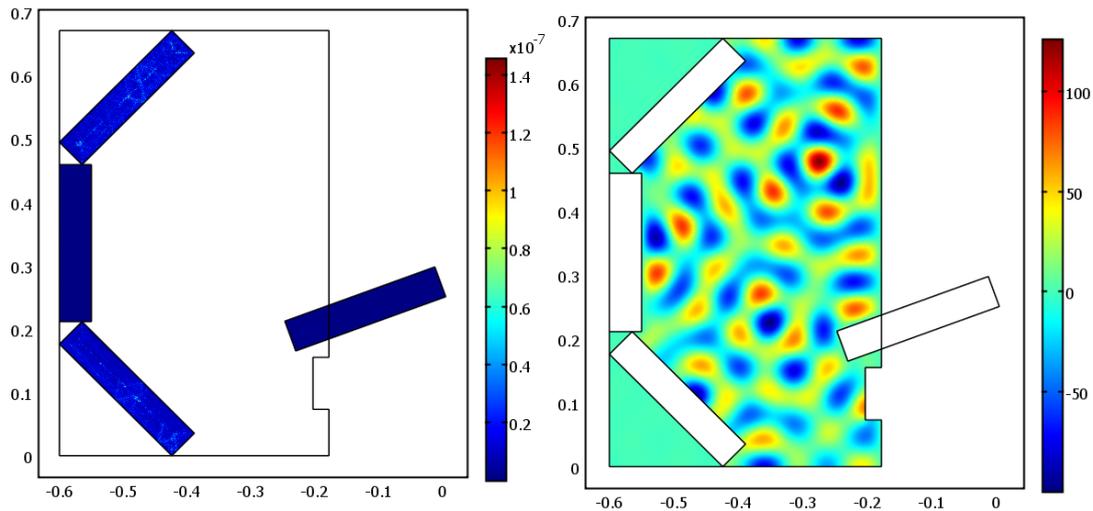


Figura 5.11: Módulo del vector desplazamiento [m] en el sólido visco-elástico (izquierda) y parte real de la presión [Pa] en el fluido (derecha) para la configuración MB.

A continuación, se ha repetido esta simulación utilizando el módulo de Young obtenido en el ajuste conjunto de los valores experimentales de IL y FPD (véanse los valores en la Tabla 5.1). En este último caso, en la Figura 5.12 se muestra la norma L_2 del desplazamiento producido en el sólido visco-elástico y la parte real de la presión en el fluido.

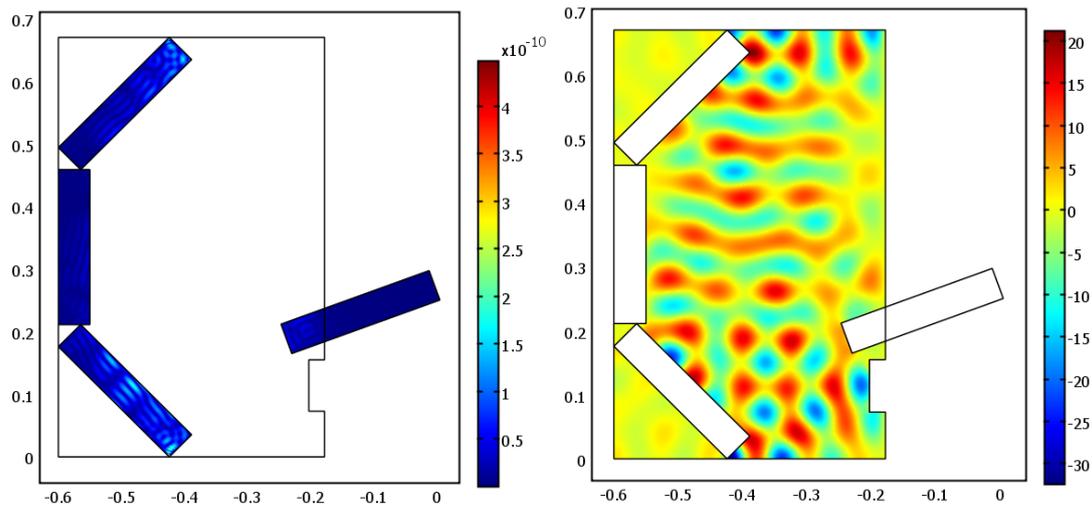


Figura 5.12: Módulo del vector desplazamiento [m] en el sólido visco-elástico (izquierda) y parte real de la presión [Pa] en el fluido (derecha) para la configuración MB.

5.3. Simulaciones numéricas multi-frecuenciales

La finalidad de esta sección es obtener los valores cuadráticos medios de la presión a lo largo del eje acústico del transductor para las tres configuraciones geométricas que se han mostrado anteriormente. Con el fin de obtener unos resultados más realistas y poder compararlos con los obtenidos de forma experimental por el Grupo de Investigación en Metrología Óptica de la Universidad de Vigo, se ha descartado el uso de simulaciones numéricas mono-frecuenciales en las que se supone que el transductor trabaja únicamente a $f = 20$ kHz. Por el contrario, se ha tenido en cuenta que el espectro de la excitación acústica generada por el transductor viene dado por una señal como la que se muestra en la Figura 5.13.

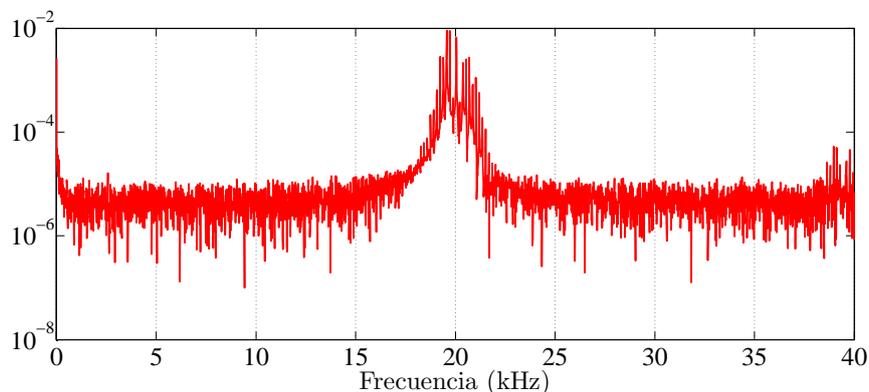


Figura 5.13: Espectro de la señal producida por el transductor representada en el rango de 0 a 40kHz frente a la frecuencia.

Si no se tienen en cuenta todas las contribuciones por encima de 30 kHz, podemos trabajar con el espectro generado por el transductor en una región alrededor de 20 kHz (véase Figura 5.14).

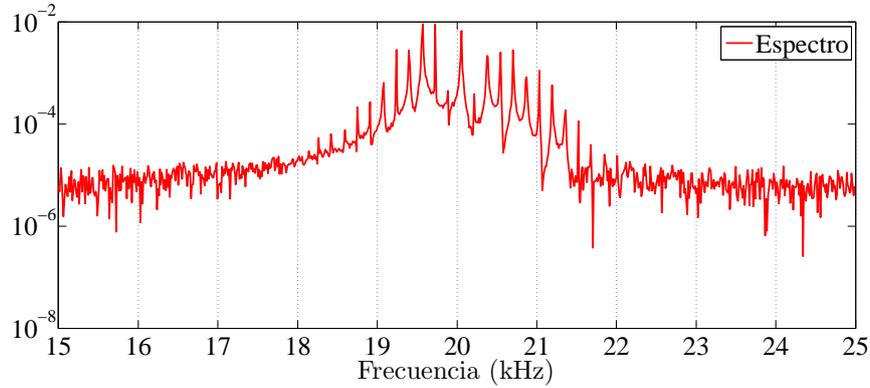


Figura 5.14: Espectro de la presión acústica frente a la frecuencia alrededor de $f = 20$ kHz.

A partir de este espectro, lo primero que se ha realizado es un suavizado de su respuesta en frecuencia. Para ello se ha utilizado un spline cúbico suavizado que se ajusta a los datos con una determinada tolerancia ρ . El spline p se ha calculado a partir de los pares de datos (x_j, y_j) con $j = 1, \dots, n$ utilizando la siguiente expresión:

$$p = \arg \min_{g \in \mathcal{C}([a,b])} \left(\rho E(g) + F(g^{(m)}) \right),$$

donde

$$E(g) = \sum_{j=1}^n |y_j - g(x_j)|^2$$

y

$$F(g^{(m)}) = \int_a^b |g''(t)| dt.$$

Si la tolerancia es negativa, se considera $\rho = -\text{tol}$. En nuestro caso, se ha utilizado la implementación en MATLAB mediante la función `spaps` (véase [19]) con una tolerancia -1×10^{-8} . El resultado de este suavizado es la línea azul continua que se muestra en la Figura 5.15.

Una vez realizado el suavizado del espectro, se han tomado 10 frecuencias equiespaciadas alrededor de $f = 20$ kHz (véase Figura 5.15). Este conjunto de frecuencias discretas han sido las utilizadas para aproximar la contribución multi-frecuencial del espectro del transductor.

| f [Hz] | E' [Pa] | E'' [Pa] |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| 1.7651×10^4 | 2.1396×10^5 | 9.5163×10^1 |
| 1.8088×10^4 | 2.2468×10^5 | 1.0122×10^2 |
| 1.8525×10^4 | 2.3566×10^5 | 1.0670×10^2 |
| 1.8962×10^4 | 2.4690×10^5 | 1.1299×10^2 |
| 1.9398×10^4 | 2.5841×10^5 | 1.2036×10^2 |
| 1.9835×10^4 | 2.7018×10^5 | 1.2955×10^2 |
| 2.0272×10^4 | 2.8220×10^5 | 1.4152×10^2 |
| 2.0709×10^4 | 2.9448×10^5 | 1.5032×10^2 |
| 2.1145×10^4 | 3.0706×10^5 | 1.5675×10^2 |
| 2.1582×10^4 | 3.1988×10^5 | 1.6330×10^2 |

Tabla 5.2: Valores de la parte real y la parte imaginaria del módulo de Young para cada frecuencia de estudio obtenidas a partir del ajuste de los valores experimentales del nivel ER.

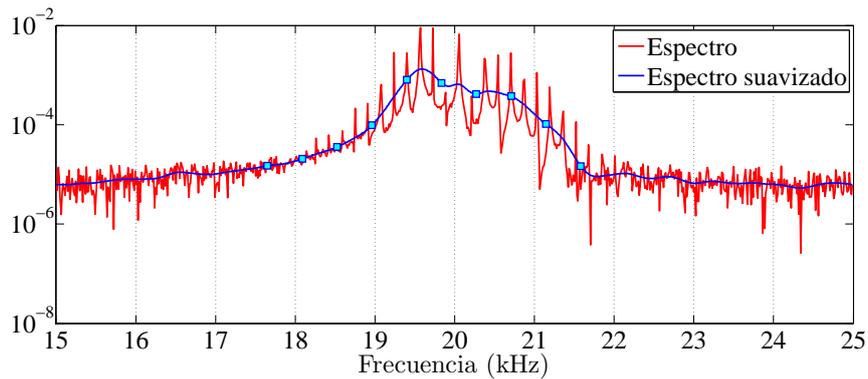


Figura 5.15: Espectro de la señal del transductor en el rango de frecuencias entre 15 y 25 kHz (línea continua puntos), su función de respuesta en frecuencia suavizada (línea continua) y los valores elegidos para realizar su representación discreta (cuadrados).

En la Tabla 5.2 se muestran los valores de la parte real y la parte imaginaria del módulo de Young analizado en el ajuste del nivel ER analizado en el Capítulo 3 para cada una de las frecuencias de estudio del espectro del transductor. Del mismo modo en la Tabla 5.3 se muestran los valores de la parte real y la parte imaginaria del módulo de Young obtenidos en el ajuste conjunto de valores de los niveles IL y FPD, para cada una de las frecuencias en que se ha realizado la simulación numérica de las tres configuraciones geométricas.

Puesto que nuestro objetivo es calcular los valores cuadráticos medios de la presión a lo largo del eje perpendicular a la cara activa del transductor, debemos recordar que para un campo de presiones armónico Π , se satisface

$$\Pi_{\text{rms}}^2 = \frac{|\Pi|^2}{2}. \quad (5.1)$$

| f [Hz] | E' [Pa] | E'' [Pa] |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| 1.7651×10^4 | 4.4842×10^7 | 6.7716×10^6 |
| 1.8088×10^4 | 4.7045×10^7 | 7.5577×10^6 |
| 1.8525×10^4 | 4.9314×10^7 | 8.3588×10^6 |
| 1.8962×10^4 | 5.1528×10^7 | 9.1869×10^6 |
| 1.9398×10^4 | 5.4056×10^7 | 1.0097×10^7 |
| 1.9835×10^4 | 5.6370×10^7 | 1.1073×10^7 |
| 2.0272×10^4 | 5.8387×10^7 | 1.2225×10^7 |
| 2.0709×10^4 | 6.0564×10^7 | 1.2987×10^7 |
| 2.1145×10^4 | 6.3043×10^7 | 1.3584×10^7 |
| 2.1582×10^4 | 6.5680×10^7 | 1.4148×10^7 |

Tabla 5.3: Valores de la parte real y la parte imaginaria del módulo de Young para cada frecuencia de estudio obtenidas a partir del ajuste de los valores experimentales de IL y FPD.

De esta forma, se han realizado cada una de las simulaciones numéricas con cada una de las 10 frecuencias diferentes obteniendo así un campo de presiones Π_j con $1 \leq j \leq 10$ asociado a cada frecuencia. A continuación realizaremos la combinación lineal ponderada por los respectivos a_{ν_i} . Dichos a_{ν_i} son los valores del espectro suavizado para cada una de las 10 frecuencias de estudio obteniendo

$$\Pi = \sum_{j=1}^{10} a_{\nu_j} \Pi_j. \quad (5.2)$$

Finalmente, sustituyendo (5.2) en (5.1) se obtiene

$$\Pi_{\text{rms}}^2 = \frac{1}{2} \left| \sum_{j=1}^{10} a_{\nu_j} \Pi_j \right|^2$$

De la misma forma a como se ha procedido en las simulaciones numéricas mono-frecuenciales, en primer lugar, se trabaja con el ajuste de ER, es decir, con los datos mostrados en la Tabla 5.2. Los ajustes de ER realizados en MATLAB se han hecho considerando que la aceleración normal vale 1, es decir, $a_{\nu_0} = 1$. Para obtener las gráficas adecuadas se han reescalado las gráficas obtenidas mediante la simulación numérica. Este proceso ha sido posible realizarlo ya que nuestro problema es lineal. Para encontrar el valor a por el cuál se ha reescalado la solución se ha tenido en cuenta el siguiente ajuste:

Se denota por $p_{\text{MP}_j}^{\text{exp}}$, $p_{\text{MA}_j}^{\text{exp}}$ y $p_{\text{MB}_j}^{\text{exp}}$ con $j = 1, \dots, N$ a los valores experimentales obtenidos al medir el valor cuadrático medio de la presión en la configuración geométrica MP, MA y MB, respectivamente (obtenidos a partir de las tres gráficas de la izquierda de las Figuras 5.7, 5.9 y 5.11), donde N es el número de puntos a lo largo del eje perpendicular a la cara activa del transductor en que se calculan los valores cuadrático

medios de la presión. Se denota por $p_{MP_j}^{\text{anl}}$, $p_{MA_j}^{\text{anl}}$ y $p_{MB_j}^{\text{anl}}$, a los valores analíticos obtenidos al medir el valor cuadrático medio de la presión en la configuración geométrica MP, MA y MB, respectivamente. Se introducen, a partir del modelo, las funciones respuesta

$$p_{MP_j}^{\text{anl}} = \widehat{p}_{MP}(a, z_j),$$

$$p_{MA_j}^{\text{anl}} = \widehat{p}_{MA}(a, z_j),$$

$$p_{MB_j}^{\text{anl}} = \widehat{p}_{MB}(a, z_j),$$

donde $a_\nu = a \cdot a_{\nu_0}$ y z_j es la distancia, en el sentido negativo del eje longitudinal del transductor, del origen al punto en el que se calcula el valor cuadrático medio de la presión. El problema de minimización viene dado por

$$a = \arg \min_{x>0} \left(\frac{\sqrt{\sum_{j=1}^N |p_{MP_j}^{\text{exp}} - \widehat{p}_{MP}(x, z_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^N |p_{MP_j}^{\text{exp}}|^2}} + \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^N |p_{MA_j}^{\text{exp}} - \widehat{p}_{MA}(x, z_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^N |p_{MA_j}^{\text{exp}}|^2}} + \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^N |p_{MB_j}^{\text{exp}} - \widehat{p}_{MB}(x, z_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^N |p_{MB_j}^{\text{exp}}|^2}} \right). \quad (5.3)$$

Una vez realizado el ajuste, se puede calcular el error relativo cometido en norma L_2 , para cada una de las configuraciones utilizando las siguientes expresiones

$$\mathcal{E}_{MP} = 100 \times \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^N |p_{MP_j}^{\text{exp}} - \widehat{p}_{MP}(a, z_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^N |p_{MP_j}^{\text{exp}}|^2}}, \quad (5.4)$$

$$\mathcal{E}_{MA} = 100 \times \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^N |p_{MA_j}^{\text{exp}} - \widehat{p}_{MA}(a, z_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^N |p_{MA_j}^{\text{exp}}|^2}}, \quad (5.5)$$

$$\mathcal{E}_{MB} = 100 \times \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^N |p_{MB_j}^{\text{exp}} - \widehat{p}_{MB}(a, z_j)|^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^N |p_{MB_j}^{\text{exp}}|^2}}. \quad (5.6)$$

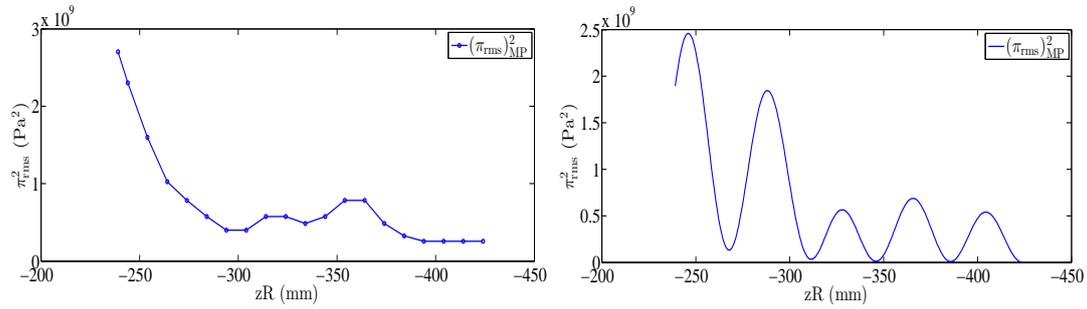


Figura 5.16: Valores cuadráticos medios de la presión obtenidos en la configuración MP de forma experimental (izquierda) y mediante simulación numérica reescalada (derecha), usando el módulo de Young obtenido a partir del ajuste de ER.

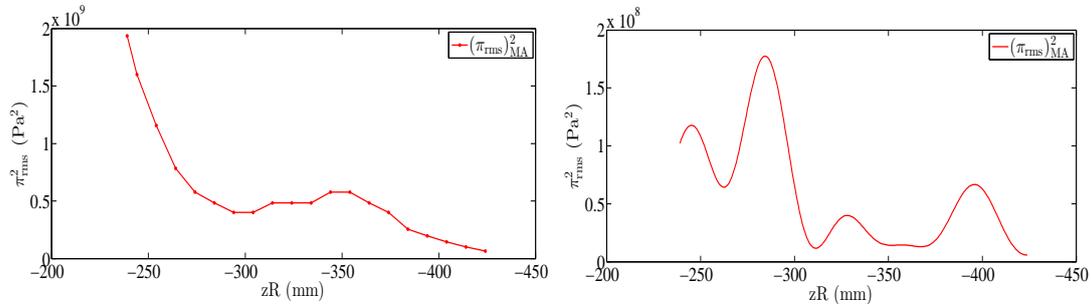


Figura 5.17: Valores cuadráticos medios de la presión obtenidos en la configuración MA de forma experimental (izquierda) y mediante simulación numérica reescalada (derecha), usando el módulo de Young obtenido a partir del ajuste de ER.

Al realizar el ajuste mostrado en (5.3) utilizando los valores de $p_{MP_j}^{anl}$, $p_{MA_j}^{anl}$ y $p_{MB_j}^{anl}$ obtenidos en las simulaciones numéricas realizadas para el ajuste de ER, se ha obtenido $a = 8.9229 \times 10^{10}$. En las Figuras 5.7, 5.9 y 5.11 se muestran las gráficas que resultan al reescalar los resultados obtenidos mediante las simulaciones numéricas, multiplicando por a , así como los experimentales en las configuraciones MP, MA y MB, respectivamente. Los valores del error relativo cometido en cada ajuste, calculados como se indica en (5.4), (5.5) y (5.6), son $\mathcal{E}_{MP} = 49.24\%$, $\mathcal{E}_{MA} = 92.36\%$ y $\mathcal{E}_{MB} = 86.73\%$.

En segundo lugar, se trabaja con el ajuste conjunto de IL y FPD, es decir, con los datos mostrados en la Tabla 5.3. Al realizar el ajuste mostrado en (5.3) utilizando los valores de $p_{MP_j}^{anl}$, $p_{MA_j}^{anl}$ y $p_{MB_j}^{anl}$ obtenidos en las simulaciones numéricas realizadas para el ajuste conjunto de IL y FPD, se ha obtenido $a = 1.4815 \times 10^{12}$. En las Figuras 5.8, 5.10, 5.12 se muestran las gráficas que resultan al reescalar los resultados obtenidos mediante las simulaciones numéricas, multiplicando por a , así como los experimentales en las configuraciones MP, MA y MB, respectivamente.

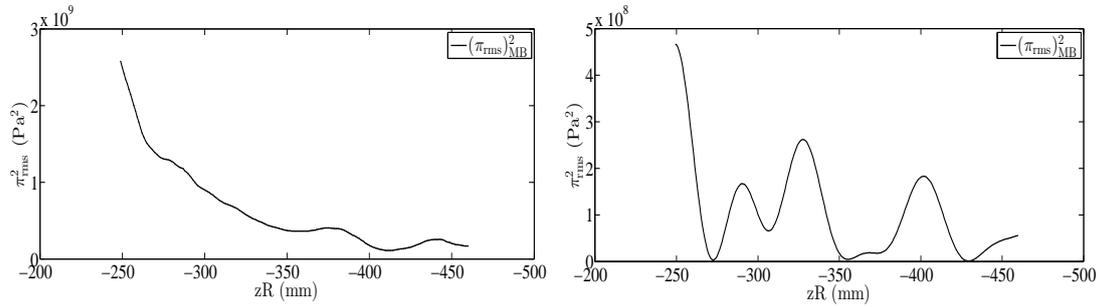


Figura 5.18: Valores cuadráticos medios de la presión obtenidos en la configuración MB de forma experimental (izquierda) y mediante simulación numérica reescalada (derecha), usando el módulo de Young obtenido a partir del ajuste de ER.

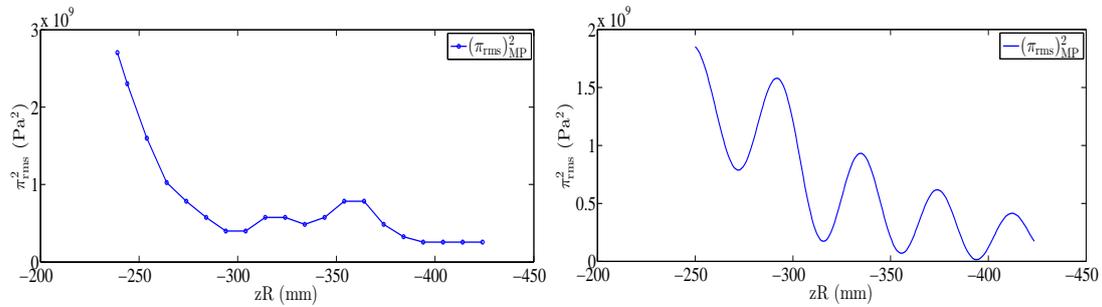


Figura 5.19: Valores cuadráticos medios de la presión obtenidos en la configuración MP de forma experimental (izquierda) y mediante simulación numérica reescalada (derecha), usando el módulo de Young obtenido a partir del ajuste conjunto de IL y FPD.

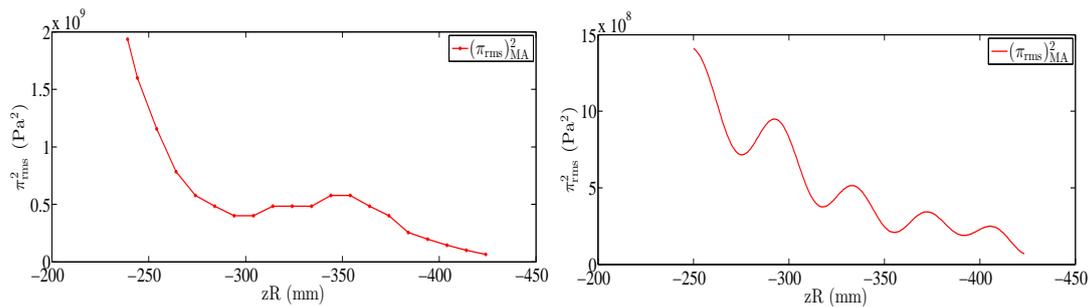


Figura 5.20: Valores cuadráticos medios de la presión obtenidos en la configuración MA de forma experimental (izquierda) y mediante simulación numérica escalada (derecha), usando del módulo de Young obtenido a partir del ajuste conjunto de IL y FPD.

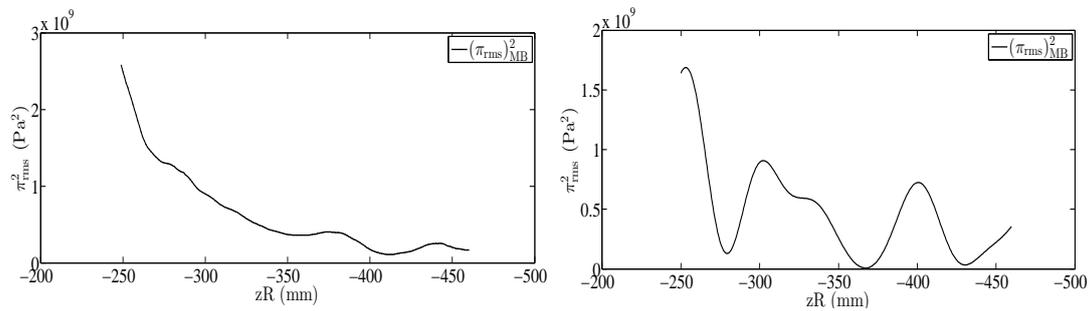


Figura 5.21: Valores cuadráticos medios de la presión obtenidos en la configuración MB de forma experimental (izquierda) y mediante simulación numérica reescalada (derecha), usando el módulo de Young obtenido a partir del ajuste conjunto de IL y FPD.

Los valores del error relativo cometido en cada ajuste, calculados como se indica en (5.4), (5.5) y (5.6), son $\mathcal{E}_{MP} = 46.53\%$, $\mathcal{E}_{MA} = 32.81\%$ y $\mathcal{E}_{MB} = 49.88\%$.

La simulación numérica se ha hecho con varias configuraciones para tratar de minimizar la cantidad de oscilaciones que presenta el valor cuadrático medio de la presión en el caso de la configuración MP, ya que dichas oscilaciones se deben a la presencia de ondas reflejadas en las paredes del tanque. Se observa, tanto en el ajuste realizado para el nivel ER como en el realizado para IL y FPD, que al introducir un absorbente en el fondo del tanque (configuración MA) se producen menos oscilaciones que cuando la cara activa del transductor se encontraba directamente frente a la pared del tanque. De forma similar, se aprecia el mismo fenómeno en la configuración con los absorbentes colocados a modo de “trampa” acústica (configuración MB). Sin embargo, se observa que los resultados obtenidos en la simulación numérica no son satisfactorios ya que los errores relativos cometidos están todos por encima del 30%, llegando en algún caso a alcanzar el 90%. Esto puede deber a multitud de razones. A continuación se describen algunas de ellas:

- Se ha realizado una simulación numérica en 2D mientras que el experimento es un experimento 3D.
- Se han considerado las paredes del tanque con condiciones de frontera rígida cuando realmente en los experimentos el tanque es de metacrilato.
- Se ha considerado que el transductor tiene un movimiento de traslación en dirección perpendicular a su superficie activa que, al realizar la simulación en 2D, simplemente es una línea, pero en el experimento el transductor es un pistón circular que se podría esperar que no se comportase como una superficie rígida que vibra únicamente restringida a una dirección sino que tuviese un comportamiento más complejo.
- Se ha considerado que el transductor tiene una única frecuencia de excitación alrededor de los 20 kHz pero en los espectros de presión acústica proporcionados por el Grupo de Investigación en Metrología Óptica se apreciaban frecuencias de

excitación alrededor de los 60 y los 80 kHz las cuáles podrían tener repercusión sobre los resultados numéricos obtenidos.

Bibliografía

- [1] COMSOL Multiphysics. <http://www.comsol.com/>. [Online; último acceso: 1 Junio 2015].
- [2] Revised release on the IAPWS formulation 1995 for the thermodynamic properties of ordinary water substance for general and scientific use. *Proceedings of the 15th International Association for the Properties of Water and Steam*, 2014.
- [3] Precision Acoustic. Aptflex SF5048 data sheet. <http://acoustics.co.uk/products/acoustic-absorbers-syntactic-foams/anechoic-absorbers/apltile-sf5048>. [Online; último acceso: 13 Diciembre 2014].
- [4] V. A. Belogol'skii, S. S. Sekoyan, L. M. Samorukova, S. R. Stefanov, and V. I. Levtsov. Pressure dependence of the sound velocity in distilled water. *Measurement Techniques*, 42(4):406–413, 1999.
- [5] A. Bermúdez. *Continuum Thermomechanics*. Birkhauser, 2004.
- [6] N. Bilaniuk and G. S. K. Wong. Speed of sound in pure water as a function of temperature. *Journal Acoustical Society of America*, 93(3):1609–1612, 1993.
- [7] T. F. Coleman and Y. Li. On the convergence of interior-reflective newton methods for nonlinear minimization subject to bounds. *Mathematical Programming*, 67(2):189–224, 1994.
- [8] T. F. Coleman and Y. Li. A reflective newton method for minimizing a quadratic function subject to bounds on some of the variables. *SIAM Journal on Optimization*, 6:418–445, 1996.
- [9] R. D. Corsaro and L. H. Sperling. *Sound and Vibration Damping with Polymers*. American Chemical Society, 1990.
- [10] F. J. Fahy. *Sound and Structural Vibration. Radiation, Transmission and Response*. Academic Press, 1987.
- [11] V. A. Del Grosso and C. W. Mader. Speed of sound in pure water. *Journal Acoustical Society of America*, 52(5):1442–1446, 1972.
- [12] M. E. Gurtin. *An Introduction to Continuum Mechanics*. Academic Press, Boston, 1981.

-
- [13] M. E. Gurtin and E. Sternberg. On the linear theory of viscoelasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 11(1):291–356, 1962.
- [14] V. G. Jayakumari, Rahna K. Shamsudeen, R. Ramesh, and T. Mukundan. Modeling and validation of polyurethane based passive underwater acoustic absorber. *Journal Acoustical Society of America*, 130(2):724–730, 2011.
- [15] P. Junglas. Implementing the IAPWS-95 standard in MATLAB. *Proceedings of the 15th International Conference on the Properties of Water and Steam*, 2008.
- [16] L. E. Kinsler and A. R. Frey. *Fundamentals of Acoustics*. John Wiley & Sons, 2000.
- [17] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Fluid Mechanics*. Pergamon Press, 1987.
- [18] Mathworks. Optimization toolbox. Function fmincon. <http://es.mathworks.com/help/optim/ug/fmincon.html>. [Online; último acceso: 20 Mayo 2015].
- [19] Mathworks. Smoothing spline. <http://es.mathworks.com/help/curvefit/spaps.html>. [Online; último acceso: 20 Mayo 2015].
- [20] M. Meyers and K. Chawla. *Mechanical behavior of Materials*. Cambridge, 1999.
- [21] R. Reixach, R. Del Rey, J. Alba, G. Arbat, F. X. Espinachd, and P. Mutjé. Acoustic properties of agroforestry waste orange pruning fibers reinforced polypropylene composites as an alternative to laminated gypsum boards. *Construction and Building Materials*, 77:124–129, 2015.
- [22] I. S. Sokolnikoff. *Mathematical Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, 1946.
- [23] S. A. van der Wulp. Graph digitizer. <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/23317-graph-digitizer>. [Online; último acceso: 10 Enero 2015].
- [24] W. Passchier-Vermeer and W. F. Passchier. Noise exposure and public health. *Environmental Health Perspectives*, 108:123–131, 2000.